Αγαπητοί μαθητές

Η πανδημία covid-19 ματαίωσε κάθε προγραμματισμό που είχε κάνει το Παράρτημα Αχαΐας της ΕΜΕ για τον διαγωνισμό "Ο ΘΑΛΗΣ" 2020. Έτσι φέτος δεν μπορέσαμε να σας βοηθήσουμε με τη διδασκαλία των μαθημάτων προετοιμασίας, όπως κάναμε τα προηγούμενα χρόνια.

Επειδή ο διαγωνισμός θα πραγματοποιηθεί, ετοιμάσαμε μια πρόταση προετοιμασίας των μαθητών, για τον παραπάνω διαγωνισμό, στο πλαίσιο των θεμάτων των προηγούμενων ετών.

Η παρακάτω πρόταση επισημαίνει βασικά θέματα θεωρίας και ένα σύνολο ασκήσεων προετοιμασίας.

Η Θεωρία και οι ασκήσεις είναι από τα βιβλία προετοιμασίας, για τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ, που έχει εκπονήσει το Παράρτημα.

Πρόκειται για τα τρία βιβλία:

1) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Τεύχος για Β΄ Γυμνασίου
2) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Τεύχος για Γ΄ Γυμνασίου
3) ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Πιθανότητες, Συνδυαστική, Παίγνια.

Για την Τάξη Γ χρησιμοποιήσαμε από τα παραπάνω βιβλία το 2 και το 3.

Να επισημάνουμε ότι τα παραπάνω βιβλία έχουν όλα τα θέματα της ΕΜΕ για όλους τους διαγωνισμούς του Γυμνασίου (ΘΑΛΗΣ, ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ, ΠΡΟΚΡΙΜΑΤΙΚΌΣ) από το 1985 μέχρι το 2018.

Όλα τα θέματα είναι λυμένα και επί πλέον υπάρχουν και άλλα θέματα από αντίστοιχων διαγωνισμούς άλλων χωρών καθώς και θέματα από τις εκδόσεις της ΕΜΕ.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει και η αντίστοιχη θεωρία που κρίθηκε αναγκαία για τη λύση των παραπάνω θεμάτων.

Τα παραπάνω βιβλία μπορείτε να τα βρείτε στα γραφεία του Παραρτήματος Αχαΐας Καποδιστρίου 52, τηλ. 2610422273, 6987017155.

Το κόστος κάθε βιβλίου είναι 12 €.

Τα γραφεία του Παραρτήματος είναι ανοικτά:

Δευτέρα 20.00-22.00, Τετάρτη 19.00-21.00 και Πέμπτη 19.00-21.00.

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

- Το γινόμενο $\overbrace{\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}}^{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$ (όπου ο α είναι πραγματικός αριθμός) συμβολίζεται $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ και λέγεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το φυσικό ν>1.

$$\overbrace{\boldsymbol{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}}^{\nu\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}\boldsymbol{=\alpha^\nu}$$

- Ορίζουμε: αν $\alpha\neq0$ τότε $\boldsymbol{\alpha^0=1}$ και $\boldsymbol{\alpha^1=\alpha}$.

- Η δύναμη με εκθέτη αρνητικό ακέραιο ορίζεται: $\boldsymbol{\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}}$, με $\alpha\neq0$.

- Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακεραίους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται ισχύουν οι ιδιότητες:

♦ $\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$ ♦ $\alpha^\mu:\alpha^\nu=\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$

♦ $(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu$ ♦ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

♦ $(\alpha^\nu)^\mu=\alpha^{\nu\cdot\mu}$ ♦ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ όπου α, $\beta\neq0$(ή $\alpha\beta\neq0$) και μ, ν φυσικοί αριθμοί.

Παρατηρήσεις:

α) Αν α=0, τότε αν $\nu\neq0$ το α^ν έχει νόημα και είναι πάντα 0. Αν ν=0 τότε θα είναι 0^0 που δεν ορίζεται, δεν έχει νόημα.

β) Είναι φανερό ότι αν α=β, τότε $\alpha^\nu=\beta^\nu$, **δεν ισχύει το αντίστροφο,** για παράδειγμα είναι $(-3)^2=3^2$, όμως $-3\neq3$.

Προτεραιότητα των πράξεων

- ♦ Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις
- ♦ Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- ♦ Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- ♦ Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω, απαλείφουμε τις παρενθέσεις και εκτελούμε τις πράξεις.

Ασκήσεις

1) Αν τους αριθμούς x, y συνδέει η σχέση 39x–13y=156 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathbf{A=\frac{8^x}{2^y}}$. Βρίσκεται στη σελίδα 26 του βιβλίου 2

2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathbf{K=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3)^{-1}}}$, αν είναι $\mathbf{x=2^{-10}}$, $\mathbf{y=4^{-8}}$, $\mathbf{z=8^{-6}}$, και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού. (Θαλής 20/10/2012)

3) Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathbf{A=(x+y)\cdot z^m-w}$. (Θαλής 14/11/2015)

4) Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018}$$.(Θαλής 11/11/17)

5) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200}$$. (Θαλής 10/11/2018)

6) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathbf{A=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)}.$$

Θαλής 9/11/2019

Παρατηρήσεις για ασκήσεις

- Αν $\mathbf{\alpha^2+\beta^2=0}$, τότε **α=0 και β=0.** Γενικά αν $\mathbf{\alpha^{2\nu}+\beta^{2\mu}=0,\ \nu,\mu\in N^*}$, τότε **α=0 και β=0.**
- Αν $\mathbf{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+...+\alpha_\nu^2=0}$, τότε $\mathbf{\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=0}$.
- Γενικά αν $\mathbf{\alpha_1^{2k}+\alpha_2^{2n}+\alpha_3^{2d}+...+\alpha_\nu^{2w}=0}$, τότε $\mathbf{\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=0}$.

- Αν $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, τότε **α≠0 ή β≠0.**

  Γενικά αν $\alpha^{2\nu}+\beta^{2\mu}\neq 0,\ \nu,\mu\in N^*$, τότε **α≠0 ή β≠0.**

- Αν $\alpha^2+\beta^2>0$, τότε **α≠0 ή β≠0.**

  Γενικά αν $\alpha^{2\nu}+\beta^{2\mu}>0,\ \nu,\mu\in N^*$, τότε **α≠0 ή β≠0.**

- Αν $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+...+\alpha_\nu^2\neq 0$, τότε ένας τουλάχιστον από τους **$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι διάφορος από το 0.**

- Γενικά αν $\alpha_1^{2k}+\alpha_2^{2n}+\alpha_3^{2d}+...+\alpha_\nu^{2w}\neq 0$, τότε ένας τουλάχιστον από τους **$\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι διάφορος από το 0.**

- $|\alpha|+|\beta|=0$, τότε **α=0 και β=0.**

- Αν $|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+...+|\alpha_\nu|=0$, τότε **$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu=0$.**

Ασκήσεις

1) Να λυθεί η εξίσωση: $(x^2+x)^{2010}+(x^2+2x+1)^{2020}+|x^2-1|^{2030}=0$. Βρίσκεται στη σελίδα 56 του βιβλίου 2

2) Να βρεθούν οι αριθμοί x κα y , αν ισχύει ότι: $(|x-3|+5)\cdot(|y+2|+6)=30$.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ορισμός: Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα δύο αλγεβρικών παραστάσεων η οποία αληθεύει, για όλες τις πραγματικές τιμές των μεταβλητών.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες:
Για κάθε α, κάθε β και κάθε γ ισχύουν:

1) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ (τετράγωνο αθροίσματος)
2) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ (τετράγωνο διαφοράς)
3) $2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)$
4) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ (κύβος αθροίσματος)
5) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (κύβος διαφοράς)

♦ Το τρίγωνο του Πασκάλ (Blaise Pascal 1623-1662) και το ανάπτυγμα των δυνάμεων του διωνύμου α+β.

1	$(\alpha+\beta)^0$	1
1 1	$(\alpha+\beta)^1$	$1\alpha+1\beta$
1 2 1	$(\alpha+\beta)^2$	$1\alpha^2+2\alpha\beta+1\beta^2$
1 3 3 1	$(\alpha+\beta)^3$	$1\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
1 4 6 4 1	$(\alpha+\beta)^4$	$1\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+1\beta^4$
1 5 10 10 5 1	$(\alpha+\beta)^5$	$1\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+1\beta^5$

Το τρίγωνο του Pascal κατασκευάζεται ως εξής:

α) Κάθε σειρά αριθμών αρχίζει και τελειώνει με 1.

β) Το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών, μιας σειράς, γράφεται στην παρακάτω σειρά και μεταξύ των δύο αυτών αριθμών.

γ) Για να βρούμε τα αναπτύγματα $(\alpha-\beta)^\nu$ χρησιμοποιούμε όπως προηγουμένως το τρίγωνο του Πασκάλ, μόνο που θέτουμε τα πρόσημα εναλλάξ, αρχίζοντας από +.

π.χ. $(\alpha-\beta)^4= 1\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+1\beta^4$,

$(\alpha-\beta)^5=1\alpha^5-5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4-1\beta^5$.

6) $\boldsymbol{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$ (διαφορά τετραγώνων)

7) $\boldsymbol{\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$ (διαφορά κύβων)

Γενίκευση:

$\boldsymbol{\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})}$, $\boldsymbol{\nu\in\mathbb{N}^*}$

8) $\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$ (άθροισμα κύβων)

Γενίκευση:

$\boldsymbol{\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2-\alpha^{\nu-4}\beta^3+\ldots-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})}$, **όπου ν περιττός φυσικός αριθμός.**

9) $\boldsymbol{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}$

Ασκήσεις

1) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β και γ, οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\cdot\alpha-4\cdot\beta-6\cdot\gamma+14=0$ (1).

(Θαλής 21/101995)

2) Να υπολογιστεί η παράσταση :
$A=(2004^2\cdot 2003^2-2003^2\cdot 2002^2):(2004\cdot 2003^2+2003^2\cdot 2002)$.

3) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει:
$(x^2-4x+5)(y^2+2y+11)=10$. Βρίσκεται στη σελίδα 73 του βιβλίου 2

4) Να βρεθεί στην απλούστερη μορφή η παράσταση:
$A=\dfrac{x^2+2\sqrt{2}\cdot x+2}{4x+5}:\dfrac{x^2-2}{16x^2+40x+25}$. Βρίσκεται στη σελίδα 89 του βιβλίου 2

5) Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=\alpha^2-10\alpha\beta+27\beta^2-8\beta+8$.
Για ποιες τιμές των α, β λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης Α;

(Θαλής 3/11/2001)

6) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{x^4-1}{(x^2+1)(x^2-3)}-\dfrac{6}{13}$, *αν* $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

(Θαλής 01/11/2014)

Εξισώσεις - Ανισώσεις

Οι εξισώσεις της μορφής αx+β=0

Είναι **αx+β=0⇔ αx=–β (1)**

- Αν α≠0 τότε η (1) γίνεται: $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση
- Αν α=0, τότε η (1) γίνεται 0x= –β οπότε
  - αν β≠0 η εξίσωση είναι αδύνατη.
  - αν β=0 η εξίσωση γίνεται 0x=0, οπότε αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό (ταυτότητα ή αόριστη).

Οι Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο x είναι: $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq 0}$.

Οι αριθμοί α, β, γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται σταθερός όρος.

- Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων.
  - Επίλυση εξίσωσης της μορφής: $\mathbf{\alpha x^2+\beta x=0}$ (1) με $\mathbf{\alpha\neq 0}$.

    Η (1) $\Leftrightarrow x(\alpha x+\beta)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\mathbf{x=-\frac{\beta}{\alpha}}$.

    π.χ. $\mathbf{8x^2=3x \Leftrightarrow 8x^2-3x=0} \Leftrightarrow x(8x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\mathbf{x=\frac{3}{8}}$.
  - Επίλυση εξίσωσης της μορφής : $\mathbf{\alpha x^2+\gamma=0}$ (2) με $\mathbf{\alpha\neq 0}$.

    Η (2) $\Leftrightarrow$ $\alpha x^2=-\gamma \Leftrightarrow$ $\mathbf{x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}}$, οπότε αν $\mathbf{-\frac{\gamma}{\alpha}\geq 0}$ θα έχουμε $\mathbf{x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}}$, αν $\mathbf{-\frac{\gamma}{\alpha}<0}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

    π.χ. Να λυθεί η εξίσωση $-4x^2+9=0$.

(1ος τρόπος) $-4x^2+9=0 \Leftrightarrow -4x^2=-9 \Leftrightarrow$ αν $\mathbf{x^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}}$.

(2ος τρόπος) $-4x^2+9=0 \Leftrightarrow 3^2-(2x)^2=0 \Leftrightarrow (3-2x)(3+2x)=0 \Leftrightarrow 3-2x=0$ ή $3+2x=0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x=\frac{3}{2}}$ ή $\mathbf{x=-\frac{3}{2}}$.

Όμοια να λυθεί η εξίσωση $5x^2+4=0$.

Η εξίσωση $5x^2+4=0$ είναι αδύνατη ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών.

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού

- Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου:

  $\mathbf{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq 0}$.

  Ο γενικός τύπος για τις λύσεις της εξίσωσης είναι ο:

  $$\mathbf{x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.$$

  Η υπόρριζη παράσταση $\mathbf{\beta^2-4\alpha\gamma}$, λέγεται διακρίνουσα (και συμβολίζεται με Δ, δηλαδή $\mathbf{\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma}$), γιατί αυτή καθορίζει το είδος των λύσεων.

  Συγκεκριμένα θα έχουμε:

- Αν Δ>0, τότε η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες λύσεις τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν Δ=0, τότε η εξίσωση (1) έχει μία διπλή λύση την $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$.
- Αν Δ<0, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει λύση (είναι αδύνατη).

.

- **Παραγοντοποίηση Τριωνύμου (το πολυώνυμο με τρείς όρους το λέμε τριώνυμο)**

Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$.

Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2ου βαθμού μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα της καθημερινής μας ζωής, της Οικονομίας, της Φυσικής κ.τ.λ.

Γενικά

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα, συνήθως, ακολουθούμε την εξής πορεία

- Συμβολίζουμε με μια μεταβλητή ένα από τα ζητούμενα.
- Εκφράζουμε με τη βοήθεια της μεταβλητής αυτής συμβολικά τα διάφορα μεγέθη που περιέχονται στο πρόβλημα.
- Βρίσκουμε μια ισότητα μεταξύ των μεγεθών αυτών και σχηματίζουμε εξίσωση.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε αν η λύση ανταποκρίνεται στο πρόβλημα.

Ασκήσεις

1) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x^2+x\right)^{2016}+\left(x^2+2x+1\right)^{2016}+\left(x^2+3x+2\right)^{2016}+\ldots+\left(x^2+2000x+1999\right)^{2016}=0.$$

Βρίσκεται στη σελίδα 117 του βιβλίου 2

2) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{40}{x^2+2x-48}-\frac{20}{x^2+9x+8}+\frac{8}{x^2+10x}-\frac{12}{x^2+5x-50}=-1.$$

Βρίσκεται στη σελίδα 115 του βιβλίου 2

3) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2}{x^2-4}-\frac{4-x}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

4) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{40}{x^2+2x-48}-\frac{20}{x^2+9x+8}+\frac{8}{x^2+10x}-\frac{12}{x^2+5x-50}=-1.$$

5) Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδόν κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 800 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

(Θαλής 11/11/17)

6) Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

(Θαλής 10/11/2018)

7) Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 €. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 €, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 €.

Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 €, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

(Θαλής 9/11/19)

Ανισότητες - Ανισώσεις μ΄ έναν άγνωστο

Διάταξη πραγματικών αριθμών - Ανισότητες

Αν α, β∈R τότε: **α>β⇔α–β>0.**

- **Ιδιότητες της διάταξης**

  Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν:
  - **(α>β και β>γ)⇒α>γ** (μεταβατική ιδιότητα).
  - **Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:**

    Αν α<β τότε α+γ<β+γ και α–γ<β–γ.

    Αν α>β τότε α+γ>β+γ και α–γ>β–γ.

- **Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:**

  Αν α<β και γ>0 τότε α·γ<β·γ και $\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$.

  Αν α>β και γ>0 τότε α·γ>β·γ και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$.

- **Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανισότητα με την αντίστροφη φορά.**
  Δηλαδή:

  Αν α<β και γ<0 τότε α·γ>β·γ και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$.

  Αν α>β και γ<0 τότε α·γ<β·γ και $\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$.

- **(α>β και γ>δ)⇒α+γ>β+δ.**
  Γενίκευση: $(\alpha_1>\beta_1,\alpha_2>\beta_2,...,\alpha_\nu>\beta_\nu)\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu$.
- **Για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:**
  (α>β>0 και γ>δ>0) ⇒ α·γ>β·δ.
  Γενίκευση: Αν $(\alpha_1>\beta_1,\alpha_2>\beta_2,...,\alpha_\nu>\beta_\nu)$ **και επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι <u>θετικοί αριθμοί</u> τότε θα ισχύει** $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_\nu>\beta_1\cdot\beta_2\cdot...\cdot\beta_\nu$.

- **Αν α>0, β>0 και ν∈N*, τότε** $\alpha^\nu>\beta^\nu\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

<u>Προσοχή</u>

- **Για να λύσουμε μια ανίσωση α΄ βαθμού, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της επίλυσης εξισώσεων, αλλά πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης, όταν διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό.**
- **Δύο ανισότητες με την ίδια φορά δεν μπορούμε ποτέ να τις αφαιρέσουμε ή να τις διαιρέσουμε κατά μέλη.**

Ασκήσεις

1) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
$\mathbf{A}=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4$, $\mathbf{B}=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$.
Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: Α>Β. (Θαλής 24/11/2007)

2) Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις :

$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{x-5}}{\mathbf{4}}\leq \mathbf{2}$ (1) και $\frac{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}-\mathbf{3}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{2x-9}}{\mathbf{8}}\leq \mathbf{x}$ (2). (Θαλής 16/11/2011)

3) Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις $-\mathbf{4}<\mathbf{1}-\mathbf{2\beta}<\mathbf{5}$, να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση: $\mathbf{2(x+1)}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{(x+1)}<\frac{\mathbf{x}}{\boldsymbol{\beta}}$. (Θαλής 19/10/2013)

4) **(α)** Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα: $\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021}$, χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα: $\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023}$, χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και στα δύο ερωτήματα.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1ο κριτήριο ισότητας: Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
2ο κριτήριο ισότητας: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
3ο κριτήριο ισότητας: Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Παρατήρηση: Η ισότητα δύο τριγώνων προϋποθέτει τις ισότητες τριών αντίστοιχων στοιχείων από τα οποία ένα τουλάχιστον είναι ισότητα πλευρών.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή**
- **μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.**

Ασκήσεις

1) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Ο. Στην προέκταση της ΑΒ, προς το Β, παίρνουμε τμήμα ΒΔ=ΒΓ+ΑΓ. Να αποδειχθεί ότι: ΟΔ=ΟΑ. Βρίσκεται στη σελίδα 221 του βιβλίου 2

2) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Εκατέρωθεν της πλευράς ΒΓ (και επί της ευθείας ΒΓ) θεωρούμε τα ίσα τμήματα ΒΔ=ΒΓ=ΓΕ. Η κάθετη προς τη ΔΕ, στο σημείο Ε, τέμνει την ευθεία ΔΑ στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι ΓΖ//ΑΒ. Βρίσκεται στη σελίδα 222 του βιβλίου 2

3) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με: $\hat{\mathrm{B}} = 90^{o}$ και ΑΔ=ΑΓ. Αν η ΑΓ είναι διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}$ και ΔΗ⊥ΑΓ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΗ διέρχεται από το μέσο Μ του ΓΔ. Βρίσκεται στη σελίδα 223 του βιβλίου 2

4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \omega$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 36^{o}$, να αποδείξετε ότι

I. $\omega = 36^{o}$

II. ΑΜ=ΓΖ\

III. ΒΛ=ΛΖ (Θαλής 14/11/2015)

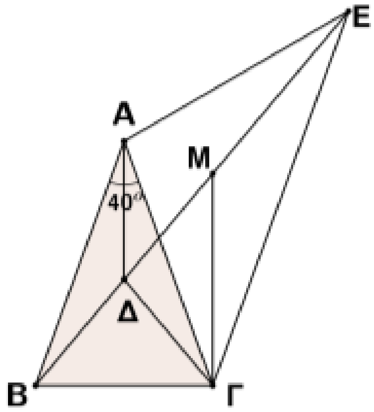
5) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}} = 40^{o}$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ=ΔΒ=ΔΓ. Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

I. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$

$\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 100^{o}$

II. Η ΑΜ είναι κάθετος στην ΓΕ.

(Θαλής 10/11/2018)



6) Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\widehat{\mathbf{BA\Gamma}}, \widehat{\mathbf{\Delta B\Gamma}}, \widehat{\mathbf{E\Delta\Gamma}}$ και $\widehat{\mathbf{ZE\Gamma}}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: ΑΒ=ΑΓ, ΒΓ=ΒΔ, ΔΓ=ΔΕ, ΕΓ=ΕΖ και ΓΖ=4 cm.

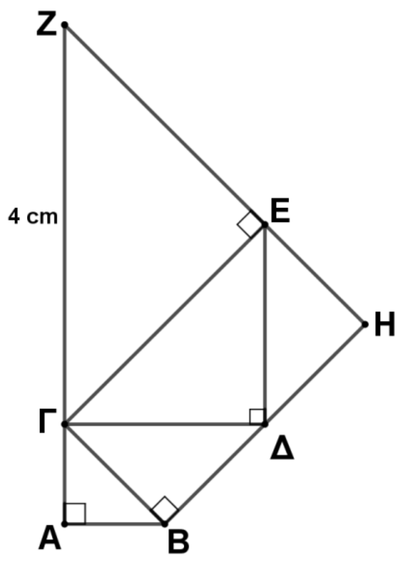
Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ,

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

Θαλής 9/11/2019)



(Η παρακάτω ύλη Βρίσκεται στο 3ο βιβλίο του Παραρτήματος ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ Θεωρία Αριθμών, Στατιστική, Πιθανότητες, Συνδυαστική, Παίγνια)

Η Ευκλείδεια Διαίρεση

Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια διαίρεση ότι εάν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς Δ (Διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) με δ≠0, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι π (πηλίκο) και υ (υπόλοιπο) τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$\Delta=\pi\cdot\delta+\upsilon,\ 0\leq\upsilon<\delta$ (**Ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης)**

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και γενικότερα για οποιουσδήποτε ακέραιους α και β.

Ειδικά αν υ=0 τότε Δ=π·δ, στην περίπτωση αυτή η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και λέμε ότι ο Δ διαιρείται με τον δ και γράφουμε δ/Δ ή ότι ο δ είναι διαιρέτης του Δ ή ότι ο Δ είναι πολλαπλάσιο το δ και γράφουμε Δ=πολδ.

Αν ο δ δεν διαιρεί τον Δ , γράφουμε $\delta\nmid\Delta$.

Ασκήσεις

1) Θεωρούμε τον αριθμό Α=1·2·3·….·2003+47. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού Α με το 21.

2) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης α:6 είναι 5, το υπόλοιπο της διαίρεσης του α:4 είναι 3 και ο α είναι ακέραιος, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης α:12.

3) Σε μια διαίρεση ο διαιρετέος είναι 2014 και το πηλίκο 20. Να βρεθούν ο διαιρέτης και το υπόλοιπο.

Παρατήρηση:
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαίρεση ενός ακεραίου αριθμού α με το **2.**

Θα είναι: α=2π+υ, υ=0,1

Αν υ=0, τότε α=2π και ο α λέγεται **άρτιος.**

Αν υ=1, τότε α=2π+1 και ο α λέγεται **περιττός.**

Ασκήσεις

1) Γράφουμε στη σειρά τους θετικούς ακεραίους σε βάση 10 δηλαδή:
123456789101112….
Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην 1993-η θέση;

(Θαλής 06/11/1993)

2) Να εξετασθεί αν υπάρχει ακέραιος αριθμός α, που να επαληθεύει την εξίσωση:
$\boldsymbol{\alpha^{4\kappa}+\alpha^{2\kappa}=(4\lambda+1)^{40\mu+1}}$ (1), όπου κ, λ, μ είναι φυσικοί αριθμοί.

3) Ένας μαθητής αγόρασε ένα βιβλίο με Ολυμπιάδες Μαθηματικών, το οποίο είχε 256 σελίδες. Ο μικρός του όμως αδελφός έσκισε κατά λάθος 25 φύλλα, όχι αναγκαστικά συνεχόμενα. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των αριθμών με τους οποίους ήταν αριθμημένες αυτές οι 50 σελίδες δεν μπορεί να είναι 2004.

4) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x και y έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση
$\mathbf{1940^{x-5}+2(x+y)=21}$.

5) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x και y έτσι ώστε να ισχύει $2^{x-2004}+2xy=4009$.

Δεκαδικές παραστάσεις θετικών ακεραίων αριθμών

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε έχει 10 ψηφία A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.
Η δεκαδική παράσταση ενός αριθμού φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα.:
35=3·10+5, γενικά $\overline{\alpha\beta}=\alpha\cdot 10+\beta$, α,β∈A, α≠0. Η παύλα πάνω από τον αριθμό αβ μπαίνει ώστε να γίνεται διάκριση από το γινόμενο αβ.
$521=5\cdot 10^2+2\cdot 10+1$, γενικά $\overline{\alpha\beta\gamma}=\alpha\cdot 10^2+\beta\cdot 10+\gamma$ με α,β,γ∈A, α≠0.

Επίσης $\overline{αβγδ} = α \cdot 10^3 + β \cdot 10^2 + γ \cdot 10 + δ = 1000α + \overline{βγδ} = 10^3 α + 10^2 β + \overline{γδ}$,
α,β,γ,δ∈A, α≠0.
Γενικά ένας αριθμός A με ν+1 ψηφία θα γράφεται
A=$\overline{α_ν α_{ν-1} \dots α_1 α_0} = α_ν \cdot 10^ν + α_{ν-1} \cdot 10^{ν-1} \dots + α_1 \cdot 10 + α_0 = 10^ν α_ν + \overline{α_{ν-1} α_{ν-2} \dots α_1 α_o}$=
$10^ν α_ν + 10^{ν-1} α_{ν-1} + \overline{α_{ν-2} α_{ν-3} \dots α_1 α_o}$, $α_ν, α_{ν-1}, .. α_o \in A$ με $α_ν \neq 0$

Σημείωση: Μπορούμε να γράφουμε
- $\overline{αβγ} = α \cdot 10^2 + β \cdot 10 + γ$=10(10α+β)+γ=10κ+γ=100α+$\overline{βγ}$ α,β,γ∈A, α≠0.
- $\overline{αβγδ} = α \cdot 10^3 + β \cdot 10^2 + γ \cdot 10 + δ = 10(100α + 10β + γ) + δ = 10μ + δ$ ή
  $\overline{αβγδ} = 100(10α + β) + \overline{γδ} = 100λ + \overline{γδ}$, ή $\overline{αβγδ} = 1000α + \overline{βγδ}$, με α,β,γ,δ∈A, α≠0 κ.λ.π.

Ασκήσεις

1) Βρείτε το άθροισμα όλων των τριών ψηφίων αριθμών εάν χρησιμοποιήσουμε τα διαφορετικά ψηφία α, β, γ και εάν δεν μας επιτρέπεται να επαναλάβουμε ένα ψηφίο (όσον αφορά τα α, β, γ).

2) Ν' αποδειχθεί ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης της μορφής $\mathbf{A = \overline{αβγ(2α)(2β)(2γ)}}$ (τα ψηφία του είναι α, β, γ, 2α, 2β, 2γ) διαιρείται με 2, 3, 167.

3) Αν $\overline{αβγδ}$ είναι ένας τετραψήφιος θετικός ακέραιος του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης τέτοιος ώστε: α+δ=(β+γ)+πολ7 να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\mathbf{A = \overline{αβ7γδ} + \overline{δγ7βα} = πολ7}$.

<u>Συνοπτική παρουσίαση κριτηρίων διαιρετότητας</u>

Έστω N=$\overline{α_ν α_{ν-1} \dots α_1 α_o} = 10^ν α_ν + 10^{ν-1} α_{ν-1} + \cdots + 10^3 α_3 + 10^2 α_2 + 10 α_1 + α_0$.

1) 2/N ⇔ $2/α_o$
2) 5/N ⇔ $α_o = 0$ ή 5
3) 3/N ⇔ $3/α_0 + α_1 + α_2 + .. + α_ν$
4) 9/N ⇔ $9/α_0 + α_1 + α_2 + .. + α_ν$
5) 4/N ⇔ $4/α_0 + 10α_1$
6) 25/N ⇔ $\overline{α_1 α_0} = 00$ ή 25 ή 50 ή 75
7) 8/N ⇔ $8/α_0 + 10α_1 + 100α_2$
8) 125/N ⇔ $\overline{α_2 α_1 α_0} = 000$ ή 125 ή 250 ή 375 ή 500 ή 625 ή 750 ή 875
9) 11/N ⇔ $11/α_0 - α_1 + α_2 - α_3 + .. + (-1)^ν α_ν$.

Ασκήσεις

1) Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha = \frac{28}{\nu}$ και $\gamma = \frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

(Θαλής 14/11/2015)

2) Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \overline{3\alpha 5b} = 3 \cdot 10^3 + \alpha \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + b \text{ και } B = \overline{5c3d} = 5 \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + d$$

I) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία α, b, c, d, ισχύει $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$.

II) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}, \frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων α, b, c, d. (Θαλής 12/11/2016)

3) Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (Θαλής 11/11/17)

4) Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις. (Θαλής 10/11/2018)