Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1 Θεωρία

- Κανόνες διαιρετότητας για τους ακεραίους : 2, 3, 4, 5, 9
- Ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (Ευκλείδης 2014)
- Έλεγχος εάν ένας αριθμός είναι πρώτος. Διαιρώ τον αριθμό με τους πρώτους οι οποίοι είναι μικρότεροι του μισού του αριθμού που ελέγχω.

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιώ τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- πρόσθεση ή αφαίρεση ή ύψωση σε δύναμη ίδιου παράγοντα σε κάθε μέλος μιας εξίσωσης
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ άρτιος
- άρτιος = περιττός $+$ περιττός
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ περιττός
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο

2 Ασκήσεις

1. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακεραίους που έχουν την ιδιότητα : Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό. (Ευκλείδης 2009, Ευκλείδης Α τ.71)

2. Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του; (Ευκλείδης 2010, Ευκλείδης Α τ.75)

3. Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = \alpha\beta\gamma$, όπου α, β, γ ψηφία με $\alpha \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α. (Ευκλείδης 2008, Ευκλείδης Α τ.67)

4. Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = abc = 100a + 10b + c$, αν ισχύουν οι προτάσεις (Ευκλείδης 2011, Ευκλείδης Α τ.79) :

- A-B=198, όπου $B = cba = 100c + 10b + a$
- Η εξίσωση $\dfrac{x+a-2c}{2a-c} - \dfrac{a-2c}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.
- Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.

5. Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $xyz = 100x + 10y + 1z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $zyx = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός xyz. (Ευκλείδης 2015, Ευκλείδης Α τ.95)

6. Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων 11 και ο αριθμός που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και των μονάδων είναι μεγαλύτερος κατά 594 από τον αρχικό αριθμό. (Ευκλείδης τ.115, σ.33)

7. Βρείτε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους $A = abcd$, που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος που προκύπτει μετά τη διαγραφή οποιουδήποτε ψηφίου τους διαιρεί τον αρχικό ακέραιο A. (Ευκλείδης Α τ.86)

8. α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5.
β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5 (Ευκλείδης 2017).

9. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (μ,ν) που ικανοποιούν την εξίσωση: μν+5μ+2ν=121 (Ευκλείδης τ.115, σ.34)

10. Να βρείτε πόσα τέλεια τετράγωνα ακεραίων είναι μεγαλύτερα του 4^9 και μικρότερα του 9^4 (Ευκλείδης Α τ.107)

Υποδείξεις ασκήσεων

1. $a \cdot b + 4(a+b) = 10a + b$, τότε $a \cdot b = 3(2a - b)$. Αν $a = 3$ τότε $b = 3$. Αν $a = 6$ τότε $b = 4$

2. $10a + b = a \cdot b\Gamma(a+b)$, τότε $(b-11)a = 2b$, τότε αρνητικός = θετικός, αδύνατον. Συνεπώς δεν υπάρχει ο ζητούμενος ακέραιος.

3. $A - B = 396$ τότε $c = a - 4$. Επίσης $A - 41 = 50(a+b+c)$ τότε $50a - 40b - 49c = 41$ Τότε $a = 40b - 155$ Επίσης $1 \leq a \leq 9$ τότε $1 \leq 40b - 155 \leq 9$ τότε $\dfrac{156}{40} \leq b \leq \dfrac{164}{40}$. Τότε $b = 4, a = 5, c = 1$ Τότε $A = 541$

4. $A - B = 198$ τότε $99(a-c) = 198$ τότε $a - c = 2$. $\dfrac{x+a-2c}{2a-c} - \dfrac{x+a-2c}{x} = 0$, τότε $(x+a-2c)(\dfrac{1}{2a-c} - \dfrac{1}{x}) = 0$, τότε $(x+a-2c)\dfrac{x-2a+c}{(2a-c)x} = 0$, τότε $x = 2c - a$ ή $x = 2a - c$. Πρέπει $2c - a + 2a - c = 4$ τότε $a + c = 4$ Τότε $a = 3, c = 1$. Συνεπώς $A = 351$

5. Είναι $xyz = 43(x+y+z)+9$ και $zyx = 30(x+y+z)+6$ και τότε $xyz - zyx = 99(x-z) = 13(x+y+z)+3$. Πρέπει ο διαιρέτης $x+y+z$ να είναι μεγαλύτερος από το υπόλοιπο 9. Συνεπώς πρέπει $10 \leq x+y+z \leq 23$. Συνεπώς $10 \cdot 13 + 3 \leq 13(x+y+z) + 3 \leq 23 \cdot 13 + 3$. Συνεπώς $133 \leq 99(x-z) < 302$. Πρέπει $x - z = 2$ ή $x - z = 3$. Αν $x - z = 2$ τότε $x + y + z = 15$ και $xyz = 654$. Αν $x - z = 3$ τότε δεν προκύπτει ακέραια λύση.

6. $cba - abc = 594$ τότε $c = a + 6$. Πρέπει $c \leq 9$, συνεπώς $a = 1$ ή $a = 2$ ή $a = 3$. Τότε $abc = 137$ ή $abc = 218$.

7. 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500

8. Υπάρχουν $99999/9 = 11111$ πολλαπλάσια του 9. Υπάρχουν $99996/6 = 16666$ πολλαπλάσια του 9. Είναι ΕΚΠ(6,9)=18. Υπάρχουν $99990/18 = 5555$ κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Συνεπώς υπάρχουν $11111 + 16666 - 5555 = 22222$ πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.

9. μν+5μ+2ν+10=121+10, τότε (μ+2)(ν+5)=131. Ο αιρθμός 131 είναι πρώτος, συνεπώς (μ+2=1 και ν+5=131) ή (μ+2=131 και ν+5=1). Τότε (μ=-1 και ν=126) ή (μ=129 και ν=-4).

10. $4^9 = (2^2)^9 = (2^9)^2 = 512^2$ και $9^4 = (3^2)^4 = (3^4)^2 = 81^1$. Συνεπώς τα ζητούμενα τετράγωνα είναι $511 - 82 + 1 = 430$.