Α ΛΥΚΕΙΟΥ - ΘΑΛΗΣ

Θεωρία

1. Γνωρίζω πολύ καλά τις ταυτότητες
2. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου ax^2+bx+c
3. Υψώνω στο τετράγωνο. πχ. Αν $\alpha+\beta=7$, τότε $(\alpha+\beta)^2=49$ (πχ. άσκηση 2.)
4. Ανισότητες (2018, 2016, 2015)
5. Σύστημα εξισώσεων (2014)
6. Στις αλγεβρικές παραστάσεις ο σταθερός όρος δεν είναι πάντα σταθερός, πχ. το 44 μπορώ να το γράψω ως 45-1, το 10 μπορώ να το γράψω ως 9+1 κλπ. (πχ. άσκηση 5.)
7. Ταυτότητα. Ισχύει ότι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$
8. Ταυτότητα $Euler$: Ισχύει ότι: Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ (πχ. άσκηση 1.9.)
9. Εστω $x<y<z$ τότε $y-x\geq 1, z-y\geq 1, z-x\geq 2$ (πχ. άσκηση 7.)
10. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
11. $1^2+2^2+3^2+\cdot+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ασκήσεις

1. Να μετατραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:
   1.1. x^4-14x^2+49
   1.2. $8x^3-12x^2+6x-1=$
   1.3. x^4+x^2+1
   1.4. x^3-3x^2+4
   1.5. $x^2-4xy-5y^2$
   1.6. $9x^4-15x^2+1$ (Ευκλείδης Β τ.85 σ.43)
   1.7. $x^4-5x^2y^2-36y^4$ (Θαλής 2018)
   1.8. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$
   1.9. $\alpha^3(\beta-\gamma)^3+\beta^3(\gamma-\alpha)^3+\gamma^3(\alpha-\beta)^3$ (Ευκλείδης Β τ.93 σ.39)
2. Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε $10(\alpha^2+\beta^2)=29\alpha\beta$ και $\alpha+\beta=7$. Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ (Θαλής 2019)
3. Να βρεθούν οι τριάδες (x,y,z) ακεραίων που είναι τέτοιες ώστε (Θαλής 2017):
$$x^2+4y^2+9z^2-4x-4y+12z+6=0$$

4. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y που ικανοποιούν τη σχέση (Θαλής 2007):

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

5. Να προσδιορίσετε τους ακεραίους x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \leq x \leq y \leq z$ και (Θαλής 2008):

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$$

6. Να βρεθούν οι πραγματικές λύσεις τις εξίσωσης (Θαλής 1998):

$$x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$$

7. Αν x, y, z διαφορετικοί ακέραιοι, ώστε $xy + yz + zx = 26.$ Να αποδείξετε ότι : $x^2 + y^2 + z^2 \geq 29$ (Στεργίου - Μπραζιτίκος 1.36)

Υποδείξεις ασκήσεων

1.1. $(x^2 - 7)^2$

1.2. $(2x - 1)^3$

1.3. Προσθέτω και αφαιρώ το x^2

1.4. Προσθέτω και αφαιρώ το x^2

1.5. Διάσπαση όρου. Στη θέση του $-5y^2$ γράφω $4y^2 - 9y^2$

1.6. Διάσπαση όρου. Στη θέση του $-15x^2$ γράφω $-9x^2 - 6x^2$

1.7. Διάσπαση όρου. Στη θέση του $-5x^2y^2$ γράφω $-9x^2y^2 + 4x^2y^2$

1.8. Θέτω $y = x^2 + x + 1$, τότε παίρνω $y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$, συνεπώς $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 5)$

1.9. Εφαρμόζω την ταυτότητα του $Euler$, τότε $\alpha\beta\gamma(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$

3. Ισοδύναμη εξίσωση: $(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$, Λύσεις: $(3, 1, -1), (1, 1, -1), (3, 0, -1), (1, 0, -1)$

4. Ισοδύναμη εξίσωση: $(x^3 + y^2)(x^3 + y^2 + 3) = 40$ Δεκτή λύση : $x^3 + y^2 = 5, x^3 + y^2 + 3 = 8$ Τότε $(x, y) = (1, 2)$. β′ τρόπος : Ισοδύναμη εξίσωση: $(x^3 + y^2)^2 + 3(x^3 + y^2) - 40 = 0$, θέτω $x^3 + y^2 = a$ και έχω : $a^2 + 3a - 40 = 0$ με λύση $a = 5$, $a = -8$ απορρίπτεται. Συνεπώς $x^3 + y^2 = 5$ με μοναδική λύση $x = 1, y = 2$.

5. Ισοδύναμη εξίσωση: $xy(z+1) + x(z+1) + y(z+1) + z + 1 = 45 \Rightarrow (z+1)(xy + x + y + 1) = 45$ Τότε οι παρενθέσεις είναι διαιρέτες του 45 και προκύπτουν οι λύσεις : $(x, y, z) = (0, 2, 14), (0, 4, 8), (2, 2, 4), (0, 0, 44)$

6. Θέτω $x^2 + x = a$ και τότε $x = 2, x = -3$

7. Εστω $x < y < z$ τότε $y - x \geq 1, z - y \geq 1, z - x \geq 2$. Υψώνω κάθε ανισότητα στο τετράγωνο και προσθέτω τις ανισότητες κατά μέλη.