Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιώ τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- πρόσθεση ή αφαίρεση ή ύψωση σε δύναμη ίδιου παράγοντα σε κάθε μέλος (ισχύει και για τις ανισώσεις)
- κανόνες διαιρετότητας με τους ακεραίους : 2, 3, 4, 5, 8, 9
- ένας ακέραιος διαιρείται με το 8 αν το τριψήφιο τμήμα στο τέλος του αριθμού διαιρείται με το 8 (πχ. ασκήσεις 4., 10.)
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ άρτιος
- άρτιος = περιττός $+$ περιττός
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ περιττός
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο
- το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x^5.
- Αν $a \cdot b^2 = c^2$ τότε a είναι τέλειο τετράγωνο : $a = \left(\frac{c}{b}\right)^2$
- Αν $a \cdot b^3 = c^3$ τότε a είναι τέλειος κύβος : $a = \left(\frac{c}{b}\right)^3$
- Αν x ακέραιος, τότε $x(x+1)$ είναι άρτιος. (πχ. άσκηση 5.)

Ασκήσεις

1. Βρείτε τους θετικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $9x^2 - 16y^2 = 17$
2. Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών; (Θαλής 2017)

3. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μια φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους ακεραίους 2,3,4,5,6,7,8,9. (Θαλής 2017)

4. Βρείτε τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι διαιρούνται με το 8 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 8 και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι επίσης 8. (Θαλής 2016)

5. Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύση της εξίσωσης $x + y + x^2 + y^2 = p$, όπου p πρώτος θετικός ακέραιος. (Θαλής 2015)

6. Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x + 1$ και $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων (Θαλής 2013)

7. α) Αν k ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση :
$$\frac{kx}{2} + \frac{x}{4} = k(x+2) - \frac{3(kx-1)}{4}$$
β) Για ποιες τιμές του ακεραίου k η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις; (Θαλής 2011)

8. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός. (Θαλής 2009)

9. Να χωριστεί ο αριθμός 317 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το μεγαλύτερο διαιρούμενο με το μικρότερο να δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 68.

10. Ο επταψήφιος αριθμός $72x20y2$, όπου x, y ψηφία, διαιρείται με το 72. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές που μπορούν να πάρουν τα x, y;

Υποδείξεις ασκήσεων

1. $(3x - 4y)(3x + 4y) = 17$, 17 πρώτος, τότε $3x - 4y = 1$ και $3x + 4y = 17$, τότε $x = 3, y = 2$

2. $\frac{90 \cdot 11}{16}$ δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατόν οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών.

3. Ο ζητούμενος αριθμός είναι της μορφής $3k + 1$, συνεπώς δεν διαιρείται με 3,6,9 ούτε με 4,5,8. Συνεπώς διαιρείται με 2,7 και είναι ο αριθμός 994

4. Δεκτά ψηφία οι διαιρέτες του 8, δηλ. 1,2,4,8. Οι ζητούμενοι αριμοί είναι οι : $4112, 22112$

5. $x(x + 1) + y(y + 1) = p$, είναι άρτιος + άρτιος = άρτιος, συνεπώς $p = 2$. Τότε ($x(x + 1) = 2$ και $y(y + 1) = 0$) ή ($x(x + 1) = 0$ και $y(y + 1) = 2$). Τότε $(x, y) \in \{(1, 0), (1, -1), (-2, 0), (-2, -1)\}$ ή $(x, y) \in \{(0, 1), (-1, 1), (0, -2), (-1, -2)\}$

6. Εστω $a^2 = 8x + 1$ και $b^2 = 2x - 3$. Τότε $\frac{a^2 - 1}{8} = \frac{b^2 + 3}{2}$ και τότε $(a + 2b)(a - 2b) = 13$ όπου 13 πρώτος. Λύσεις : $(7, 3), (-7, -3), (7, -3), (-7, 3)$

7. Ισοδύναμη εξίσωση: $(k + 1)x = 8k + 3$. Τότε αν $k = -1$ αδύνατη, αν $k \neq -1, x = \frac{8k + 3}{k + 1}$. Αν x ακέραιος, τότε : $\frac{8k + 3}{k + 1} = 8 - \frac{5}{k + 1}$, τότε $k + 1$ διαιρέτης του 5 (δηλ. 1 ή 5 ή -1 ή -5). Τελικά $k =$0

ή 4 ή -2 ή -6.

8. $x^2 = 10x + 75$, τότε $x = 15$

9. Εστω x το μικρότερο μέρος, τότε $317 - x = 2x + 68 \Leftrightarrow x = 83$ το μικρότερο και 234 το μεγαλύτερο.

10. Ο επταψήφιος πρέπει να διαιρείται με το 8 και το 9. Συνεπώς το 8 πρέπει να διαιρεί το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του ζητούμενου αριθμού και το άθροισμα των ψηφίων να διαιρείται με το 9. Τότε οι ζητούμενοι επταψήφιοι είναι $7222032, 7272072$.