Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3.
- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4.
- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται με το 2 και με το 3
- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9.
- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 αν διαιρείται με το 2 και με το 5.

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιούμε τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ άρτιος
- άρτιος = περιττός $+$ περιττός
- άρτιος = άρτιος $\cdot$ περιττός
- για κάθε ακέραιο x, ο αριθμός $x(x+1)$ είναι άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο
- για κάθε ακέραιο x το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x^5 είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου a, για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-a}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις. (Θαλής 2018)
2. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μια φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους ακεραίους 2,3,4,5,6,7,8,9. (Θαλής 2017)
3. Να βρείτε τους τριψήφιους οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση : Ο διψήφιος που προκύπτει αν σβήσουμε το μεσαίο ψηφίο είναι ίσος με το $\dfrac{1}{3}$ του τριψήφιου. (Καγκουρό 2018 Γ Γυμν. πρόβλημα 18)

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $ababab$, όπου a, b είναι ψηφία με διαιρείται με το 7. (Καγκουρό 2017 Γ Γυμν. πρόβλημα 24)

5. Να βρείτε τα ψηφία x, y, z τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και διάφορα του 0, έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση: $xxxx + yyyy + zzzz = yxxxz$

Λύσεις:

1. Για $a \neq 5$ είναι $x = \dfrac{2a-6}{a-5} = \dfrac{2a-10+4}{a-5} = \dfrac{2(a-5)+4}{a-5} = 2 + \dfrac{4}{a-5}$. Πρέπει $a-5$ διαιρέτης του 4. Συνεπώς το $a-5$ μπορεί να πάρει τις τιμές $-1, 1, -2, 2, -4, 4$ και τότε το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 6, 7, 9$. Τότε το x μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 0, -2, 6, 4, 3$. Πρέπει $x \neq 6$ και συνεπώς $a \neq 6$. Τελικά το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 7, 9$.

2. Ο ζητούμενος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων (πολλαπλάσιο του 3 + 1), και έχει τελευταίο ψηφίο του 5, συνεπώς δεν διαιρείται με τους : 3,6,9,5. Συνεπώς ο ζητούμενος αριθμός θα διαιρείται με τους: 2,4,7,8. Τελικά ο μικρότερος είναι ο 6664.

3. $5(a+b) = 4c$, τότε $c = 5, a+b = 4$, τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $135, 225, 315, 405$

4. $ababab = (10^4 + 10^2 + 1)(10a + b) = 10101 \cdot (10a + b) = 1443 \cdot 7 \cdot (10a + b)$

5. Με πρόσθεση των τελευταίων ψηφίων έχουμε: $x + y + z = z$ και 1 κρατούμενο, συνεπώς πρέπει $x + y = 10$. Αν $x = 9, y = 1$ τότε με πρόσθεση του δεύτερου ψηφίου από το τέλος θα πρέπει $9 + 1 + z + 1 = 9$ και 1 κρατούμενο. Συνεπώς πρέπει $z = 8$ και τότε προκύπτει η σχέση: $9999 + 1111 + 8888 = 19998$