

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΘΑΛΗΣ

Προτάσεις

Για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι :

- $2n$ είναι άρτιος, συνεπώς $(-1)^{2n} = 1$
- $2n - 1$, είναι περιττός, συνεπώς $(-1)^{2n-1} = -1$
- $2n + 1$ είναι περιττός, συνεπώς $(-1)^{2n+1} = -1$
- Κάθε δύναμη του 5 έχει ως τελευταίο ψηφίο το 5.
- Κάθε δύναμη του 6 έχει ως τελευταίο ψηφίο το 6.

Ασκήσεις

- 1) Να δείξετε ότι ο αριθμός $5^9 + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 10.
- 2) Να δείξετε ότι ο αριθμός $5^{21} + 6^{17} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 10.
- 3) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $8^{10}, 2^{31}$
- 4) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $(-15)^{12}, (-12)^{15}$
- 5) Να δείξετε ότι $2^{11} \cdot 5^9 + 10^9 - 2^9 \cdot 5^{10} = 0$
- 6) Να δείξετε ότι $\frac{2^{2n} \cdot 9^n}{3^{2n}} \cdot 2^{-2n} = 1$
- 7) Να δείξετε ότι $\frac{27^n}{3^n} : 3^{2n-1} = 3$
- 8) Να δείξετε ότι $\frac{32^n}{4^{2n}} \cdot 2^{1-n} = 2$
- 9) Να δείξετε ότι $(4^{n+1} : 2^{2n} + 9^{3n} : 27^{2n} - 1^5) : (3^2 - 2^3) = 4$
- 10) Να δείξετε ότι $((5 \cdot 5^2 \cdot 5^3) : 25^3 + 1)^n = 2^n$
- 11) Αν $a = 2^{n+1} \cdot 5^n - 10^n$, $b = 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 9 \cdot 2^n$, να δείξετε ότι $\frac{a}{b} = 5^n$.
- 12) Αν $\alpha = \frac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης (Θαλής 2016)

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

- 13) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3} + \frac{1}{33} + \alpha^{-1} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{27}$, αν $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ (Θαλής 2015)
- 14) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 - 3)} - \frac{6}{13}$, αν $x = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ (Θαλής 2014)

15) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3(13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}$, αν

$$x = 2^{-10}, y = 4^{-8}, z = 8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού (Θαλής 2012)

16) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$ αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}, \beta = 10^{-5} : 10^{-7}, \gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ (Θαλής 2011)

17) Αν ισχύει $\frac{45^\nu \cdot 2^{2\nu}}{6^\nu} = 900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης (Θαλής 2008)

$$A = 2003 \cdot (-1)^\nu - (-1)^{\nu+1} + 4 \cdot (-1)^{\nu+2}$$

18) Αν $a + 2b + \frac{c}{2} = 0$ και $abc = 10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : (Θαλής 2006)

$$A = a^2 \left(a + \frac{c}{2} \right)^2 (a + 2b)^2$$

Υποδείξεις ασκήσεων

12) $\alpha = 2, \beta = 10, A = 5$

13) $\alpha = \frac{81}{16}, A = \frac{7}{3}$

14) $x = \frac{16}{9}, A = 13$

15) Αριθμητής $A = 2^{-10}$, Παρανομαστής $\Pi = 2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 11^{-2}$, Συνεπώς $K = \left(\frac{33}{16} \right)^2$

16) $\alpha = 10^2, \beta = 10^2, \gamma = 10^2, A = \frac{1}{40000} = \left(\frac{1}{200} \right)^2$

17) $\nu = 2, A = 2008$

18) $A = 100$