Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1 Θεωρία

- Κανόνες διαιρετότητας για τους ακεραίους : 2, 3, 4, 5, 9
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11 αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις. πχ. 121, 143, 651343, 123454321, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121
- Ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (Ευκλείδης 2014)
- Έλεγχος εάν ένας αριθμός είναι πρώτος. Διαιρώ τον αριθμό με τους πρώτους οι οποίοι είναι μικρότεροι της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού που ελέγχω.

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιώ τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- πρόσθεση ή αφαίρεση ή ύψωση σε δύναμη ίδιου παράγοντα σε κάθε μέλος μιας εξίσωσης
- άρτιος · άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος · περιττός = άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο

2 Ασκήσεις

1. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακεραίους που έχουν την ιδιότητα : Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό. (Ευκλείδης 2009, Ευκλείδης Α τ.71)
2. Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του; (Ευκλείδης 2010, Ευκλείδης Α τ.75)
3. Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = \alpha\beta\gamma$, όπου α, β, γ ψηφία με $\alpha \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α. (Ευκλείδης 2008, Ευκλείδης Α τ.67)

4. Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = abc = 100a + 10b + c$, αν ισχύουν οι προτάσεις (Ευκλείδης 2011, Ευκλείδης Α τ.79) :
   - A-B=198, όπου $B = cba = 100c + 10b + a$
   - Η εξίσωση $\dfrac{x+a-2c}{2a-c} - \dfrac{a-2c}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.
   - Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.
5. Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $xyz = 100x + 10y + 1z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $zyx = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός xyz. (Ευκλείδης 2015, Ευκλείδης Α τ.95)
6. Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων 11 και ο αριθμός που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και των μονάδων είναι μεγαλύτερος κατά 594 από τον αρχικό αριθμό. (Ευκλείδης τ.115, σ.33)
7. Βρείτε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους $A = abcd$, που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος που προκύπτει μετά τη διαγραφή οποιουδήποτε ψηφίου τους διαιρεί τον αρχικό ακέραιο Α. (Ευκλείδης Α τ.86)
8. α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5.
   β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5 (Ευκλείδης 2017).
9. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (a, b) που ικανοποιούν την εξίσωση: $ab + 5a + 2b = 121$ (Ευκλείδης τ.115, σ.34)
10. Να βρείτε πόσα τέλεια τετράγωνα ακεραίων είναι μεγαλύτερα του 4^9 και μικρότερα του 9^4 (Ευκλείδης Α τ.107)

Υποδείξεις ασκήσεων

1. $a \cdot b + 4(a+b) = 10a + b$, τότε $a \cdot b = 3(2a - b)$. Αν $a = 3$ τότε $b = 3$. Αν $a = 6$ τότε $b = 4$

2. $10a + b = a \cdot b\Gamma(a+b)$, τότε $(b-11)a = 2b$, τότε αρνητικός = θετικός, αδύνατον. Συνεπώς δεν υπάρχει ο ζητούμενος ακέραιος.

3. $A - B = 396$ τότε $c = a - 4$. Επίσης $A - 41 = 50(a+b+c)$ τότε $50a - 40b - 49c = 41$ Τότε $a = 40b - 155$ Επίσης $1 \leq a \leq 9$ τότε $1 \leq 40b - 155 \leq 9$ τότε $\frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40}$. Τότε $b = 4, a = 5, c = 1$ Τότε $A = 541$

4. $A - B = 198$ τότε $99(a-c) = 198$ τότε $a - c = 2$. $\frac{x+a-2c}{2a-c} - \frac{x+a-2c}{x} = 0$, τότε $(x+a-2c)(\frac{1}{2a-c} - \frac{1}{x}) = 0$, τότε $(x+a-2c)\frac{x-2a+c}{(2a-c)x} = 0$, τότε $x = 2c - a$ ή $x = 2a - c$. Πρέπει $2c - a + 2a - c = 4$ τότε $a + c = 4$ Τότε $a = 3, c = 1$. Συνεπώς $A = 351$

5. Είναι $xyz = 43(x+y+z)+9$ και $zyx = 30(x+y+z)+6$ και τότε $xyz - zyx = 99(x-z) = 13(x+y+z)+3$. Πρέπει ο διαιρέτης $x+y+z$ να είναι μεγαλύτερος από το υπόλοιπο 9. Συνεπώς πρέπει $10 \leq x+y+z \leq 23$. Συνεπώς $10 \cdot 13 + 3 \leq 13(x+y+z) + 3 \leq 23 \cdot 13 + 3$. Συνεπώς $133 \leq 99(x-z) < 302$. Πρέπει $x - z = 2$ ή $x - z = 3$. Αν $x - z = 2$ τότε $x + y + z = 15$ και $xyz = 654$. Αν $x - z = 3$ τότε δεν προκύπτει ακέραια λύση.

6. $cba - abc = 594$ τότε $c = a + 6$. Πρέπει $c \leq 9$, συνεπώς $a = 1$ ή $a = 2$ ή $a = 3$. Τότε $abc = 137$ ή $abc = 218$.

7. 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500

8. Υπάρχουν $99999/9 = 11111$ πολλαπλάσια του 9. Υπάρχουν $99996/6 = 16666$ πολλαπλάσια του 9. Είναι ΕΚΠ(6,9)=18. Υπάρχουν $99990/18 = 5555$ κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Συνεπώς υπάρχουν $11111 + 16666 - 5555 = 22222$ πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.

9. $ab + 5a + 2b + 10 = 121 + 10$, τότε $(a+2)(b+5) = 131$. Ο αριθμός 131 είναι πρώτος, συνεπώς $(a+2 = 1$ και $b + 5 = 131)$ ή $(a + 2 = 131$ και $b + 5 = 1)$. Τότε $(a, b) = (-1, 126)$ ή $(129, -4)$.

10. $4^9 = (2^2)^9 = (2^9)^2 = 512^2$ και $9^4 = (3^2)^4 = (3^4)^2 = 81^2$. Συνεπώς τα ζητούμενα τετράγωνα είναι $511 - 82 + 1 = 430$.