Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται με το 2 και με το 3
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 αν διαιρείται με το 2 και με το 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11 αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις. πχ. 121, 143, 651343, 123454321, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιούμε τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- άρτιος · άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος · περιττός = άρτιος
- για κάθε ακέραιο x, ο αριθμός $x(x+1)$ είναι άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο
- για κάθε ακέραιο x το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x^5 είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου a, για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-a}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις. (Θαλής 2018)
2. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μια φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους ακεραίους 2,3,4,5,6,7,8,9. (Θαλής 2017)

3. Να βρείτε τους τριψήφιους οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση : Ο διψήφιος που προκύπτει αν σβήσουμε το μεσαίο ψηφίο είναι ίσος με το $\frac{1}{9}$ του τριψήφιου. (Καγκουρό 2018 Γ Γυμν. πρόβλημα 18)

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $ababab$, όπου a, b είναι ψηφία με διαιρείται με το 7. (Καγκουρό 2017 Γ Γυμν. πρόβλημα 24)

5. Να βρείτε τα ψηφία x, y, z τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και διάφορα του 0, έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση: $xxxx + yyyy + zzzz = yxxxz$

Λύσεις:

1. Για $a \neq 5$ είναι $x = \frac{2a-6}{a-5} = \frac{2a-10+4}{a-5} = \frac{2(a-5)+4}{a-5} = 2 + \frac{4}{a-5}$. Πρέπει $a-5$ διαιρέτης του 4. Συνεπώς το $a-5$ μπορεί να πάρει τις τιμές $-1, 1, -2, 2, -4, 4$ και τότε το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 6, 7, 9$. Τότε το x μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 0, -2, 6, 4, 3$. Πρέπει $x \neq 6$ και συνεπώς $a \neq 6$. Τελικά το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 7, 9$.

2. Ο ζητούμενος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων (πολλαπλάσιο του 3 + 1), και δεν έχει τελευταίο ψηφίο του 0 ή 5, συνεπώς δεν διαιρείται με τους : 3,6,9,5. Συνεπώς αναζητούμε τον μικρότερο αριθμό ο οποίος θα διαιρείται με τους: 2,4,7,8. Τελικά ο μικρότερος είναι ο 6664.

3. $\frac{1}{9} \cdot (100a + 10b + c) = 10a + c$, τότε $5(a+b) = 4c$, τότε $c = 5, a + b = 4$, τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $135, 225, 315, 405$

4. $ababab = (10^4 + 10^2 + 1)(10a + b) = 10101 \cdot (10a + b) = 1443 \cdot 7 \cdot (10a + b)$

5. Με πρόσθεση των τελευταίων ψηφίων έχουμε: $x + y + z = z$ και 1 κρατούμενο, συνεπώς πρέπει $x + y = 10$. Αν $x = 9, y = 1$ τότε με πρόσθεση του δεύτερου ψηφίου από το τέλος θα πρέπει $9 + 1 + z + 1 = 9$ και 1 κρατούμενο. Συνεπώς πρέπει $z = 8$ και τότε προκύπτει η σχέση: $9999 + 1111 + 8888 = 19998$