Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

1. **Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**

2. Κανόνες διαιρετότητας για τους αριθμούς $2, 3, 4, 5, 9$

3. Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11
αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις ή
αν η διαφορά των προηγουμένων αθροισμάτων είναι πολλαπλάσια του 11
πχ. $121, 143, 704, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121, 651343, 223454121$

4. Κοινός παράγοντας (πχ. $5\alpha + 20\beta + 15\gamma = 5(\alpha + 4\beta + 3\gamma)$)

5. πχ. $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Οι διαιρέτες του 100 είναι οι : $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$.

6. πχ. Το πλήθος των διαιρετών του αριθμού $2^\alpha \cdot 5^\beta$ είναι ίσο με $(\alpha + 1)(\beta + 1)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε αριθμό βάσης.

7. πχ. Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 2^3 με το 2 προκύπτει αριθμός **τέλειο τετράγωνο**.

8. πχ. Αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 4^5 με το 4 προκύπτει αριθμός **τέλειος κύβος**.

9. Έστω $\overline{\alpha\beta}$ διψήφιος. Ισχύει η σχέση: $\overline{\alpha\beta} = 10\alpha + \beta$

10. Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριψήφιος. Ισχύει η σχέση: $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$

11. Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τετραψήφιος. Ισχύει η σχέση: $\overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$

Ασκήσεις

1. Να εκφράσετε τον ακέραιο 36 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ποιο είναι το πλήθος των διαιρετών του 36;

   Λύση : Είναι $36 = 4 \cdot 9 = 2^2 \cdot 3^2$. Οι διαιρέτες προκύπτουν με όλους τους συνδυασμούς για τις διάφορες τιμές των εκθετών του 2 και του 3.
   ο εκθέτης του 2 μπορεί να είναι 0 ή 1 ή 2 (3 τιμές),
   ο εκθέτης του 3 μπορεί να είναι 0 ή 1 ή 2 (3 τιμές).
   Συνεπώς το πλήθος των διαιρετών του 36 είναι $3 \cdot 3 = 9$

2. Να εκφράσετε τον ακέραιο 54 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ποιο είναι το πλήθος των διαιρετών του 54;

3. Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσετε την παράσταση $3 \cdot 4^2$ ώστε να προκύψει αριθμός **τέλειο τετράγωνο**;

4. Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσετε την παράσταση $2^5 \cdot 3^3$ ώστε να προκύψει αριθμός **τέλειο τετράγωνο**;

5. Με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρέσετε την παράσταση $2^5 \cdot 3^3$ ώστε να προκύψει αριθμός **τέλειο τετράγωνο**;

6. Με ποιον αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσετε την παράσταση $3^2 \cdot 5^2$ ώστε να προκύψει αριθμός **τέλειος κύβος**;

7. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου α έτσι ώστε το κλάσμα $\dfrac{4}{\alpha}$ να είναι ακέραιος.

8. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου α έτσι ώστε το κλάσμα $\dfrac{4}{\alpha - 1}$ να είναι ακέραιος.

9. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου α έτσι ώστε το κλάσμα $\dfrac{\alpha + 53}{\alpha + 18}$ να είναι ακέραιος.

10. Να βρείτε πενταψήφιους αριθμούς της μορφής $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ οι οποίοι διαιρούνται με το 15.

11. Έστω τετραψήφιος αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ με $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta$.
Ποια είναι η ελάχιστη και ποια είναι η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma + \delta$;.
Αν επιπλέον ο τετραψήφιος είναι πολλαπλάσιος του 9, ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma + \delta$;
Αν επιπλέον ο τετραψήφιος είναι πολλαπλάσιος και του 4, ποιες είναι οι δυνατές τιμές για τα ψηφία $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; (Ευκλείδης 2020)

12. Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ τετραψήφιος ακέραιος. Να δείξετε ότι το άθροισμα $\overline{\alpha\beta\gamma\delta} + \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

13. Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α. (Ευκλείδης 2017)

14. Να βρείτε πόσα τέλεια τετράγωνα ακεραίων είναι μεγαλύτερα του 5^4 και μικρότερα του 4^5 (Ευκλείδης Α τ.107)

15. Το γινόμενο των ηλικιών μιας μητέρας και των τριών παιδιών της είναι ίσο με 41041. Να υπολογίσετε την ηλικία του κάθε παιδιού και την ηλικία της μητέρας.

16. Έστω ένας διψήφιος θετικός ακέραιος. Αν αντιστρέψετε τη σειρά των ψηφίων, προκύπτει ένας ακέραιος κατά 20% μεγαλύτερος από τον αρχικό αριθμό. Ποιος είναι ο αρχικός αριθμός;

17. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{21210}{11211}$

18. Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\beta\gamma}$ για τους οποίους ισχύει $20\alpha + 5\beta + \gamma = 200$.

19. Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του. (Ευκλείδης 2020)
Υπόδειξη:
Είναι δυνατό $\alpha = 1$;
Είναι δυνατό $\alpha \geq 4$;
Έλεγχος περίπτωσης $\alpha = 3$
Έλεγχος περίπτωσης $\alpha = 2$

20. α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.
β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600. (Ευκλείδης 2019)

21. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι **τέλειο τετράγωνο ακεραίου**; (Ευκλείδης 2018)

22. Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα **τέλειο τετράγωνο**. (Ευκλείδης 2016)

23. Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α. (Ευκλείδης 2012)

24. Να βρείτε τα ψηφία $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ για τα οποία ισχύει ότι : $\alpha\beta\gamma \cdot \delta\epsilon = 7632$ και τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και διαφορετικά των ψηφίων $7, 6, 3, 2$.

25. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $abcabc$, όπου a, b, c είναι ψηφία με $a \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7,11 και 13. (Ευκλείδης 2007, Ευκλείδης Α τ.63)

Υποδείξεις - Λύσεις

7. Οι δυνατές τιμές του ακεραίου α είναι $-1, 1, -2, 2, -4, 4$

8. Οι δυνατές τιμές του ακεραίου $\alpha - 1$ είναι $-1, 1, -2, 2, -4, 4$. Συνεπώς οι δυνατές τιμές του ακεραίου α είναι $0, 2, -1, 3, -3, 5$.

9. Οι δυνατές τιμές του ακεραίου $\alpha + 18$ είναι $-1, 1, -5, 5, -7, 7, -35, 35$. Συνεπώς οι δυνατές τιμές του ακεραίου α είναι $-19, -17, -23, -13, -25, -11, -53, 17$

10. $50505, 53535, 56565, 59595$

11. $1368, 3456$

13. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Συνεπώς ο A μπορεί να έχει ως ψηφία τα εξής: $2, 6, 1$ ή $3, 4, 1, 1$ ή $2, 2, 3, 1, 1$. Τελικά η μικρότερη τιμή του A είναι ο αριθμός 216 και η μεγαλύτερη τιμή είναι ο αριθμός 32112.

14. $5^4 = (5^2)^2 = 25^2$ και $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = (2^5)^2 = 32^2$. Συνεπώς τα ζητούμενα τετράγωνα είναι 6 και είναι τα εξής: 26^2, 27^2, 28^2, 29^2, 30^2, 31^2.

15. $41041 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$

16. $10b + a = \dfrac{120}{100} \cdot (10a + b)$, τότε $11a = \dfrac{88}{10} \cdot b$, τότε $a = \dfrac{8b}{10}$, τότε $a = \dfrac{4b}{5}$, τότε $5a = 4b$, τότε πρέπει $a = 4, b = 5$. Πράγματι είναι $54 = 1,2 \cdot 45$

17. = $\dfrac{21210}{11211} = \dfrac{3 \cdot 7070}{3 \cdot 3737} = \dfrac{70 \cdot 101}{37 \cdot 101} = \dfrac{70}{37}$.

18. $875, 940$

19. 2244

20. α) 55789, β) 155789

21. Πρέπει να αφαιρεθούν 2 στοιχεία.

23. (πολλαπλάσια του 5 + πολλαπλάσια του 8 - πολλαπλάσια του $40) = 402 + 251 - 50 = 603$. Τότε έμειναν $= 2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

25.

$$\begin{aligned} abcabc &= 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c \\ &= 10^3 \cdot (100a + 10b + c) + (100a + 10b + c) \\ &= 1001 \cdot (100a + 10b + c) \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (10^2a + 10b + c) \end{aligned} \tag{1}$$