

Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Προτάσεις

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο ψηφίο είναι κάποιο από τα 0,2,4,6,8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 αν το τελευταίο **διψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 4.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 8 αν το τελευταίο **τριψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται με το 2 και με το 3
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 αν διαιρείται με το 2 και με το 5.

Υπενθύμιση

- Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ψηφία ακεραίων

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \overline{\alpha\beta\gamma} \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιούμε τα εξής :

- άρτιος \cdot άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος \cdot περιττός = άρτιος
- για κάθε ακέραιο x , ο αριθμός $x \cdot (x + 1)$ είναι άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Ασκήσεις

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 54, 138, 1001, 2023, 7070.
2. Να βρείτε τον μικρότερο διψήφιο θετικό ακέραιο που μπορεί να γραφεί είτε ως δύναμη του 2 είτε ως δύναμη του 3.
3. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που διαιρείται με όλους τους φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι και το 10.
4. Ένας τετραψήφιος αριθμός έχει τη μορφή $aabb$ και γνωρίζουμε ότι αυτός διαιρείται και με το 4 και με το 9. Βρείτε τις πιθανές τιμές των a και b και τους τετραψήφιους αριθμούς.
5. Βρείτε τους τριψήφιους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι διαιρούνται με το 6 και το γινόμενο των ψηφίων τους είναι 6 και το άθροισμα των ψηφίων τους είναι επίσης 6.
6. Ο φυσικός αριθμός a είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού a .
7. Ποιο πρέπει να είναι το ψηφίο a ώστε ο αριθμός $a587a$ να διαιρείται με το 18;
8. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου α έτσι ώστε το κλάσμα $\frac{4}{\alpha}$ να είναι ακέραιος.
9. Να βρείτε τις τιμές του ακεραίου α έτσι ώστε το κλάσμα $\frac{4}{\alpha - 1}$ να είναι ακέραιος.
10. Να βρείτε τετραψήφιους αριθμούς για καθένα από τους οποίους το άθροισμα των ψηφίων τους είναι ίσο με 35.
11. Να βρείτε πόσοι από τους 2018 σε πλήθος διαδοχικούς ακεραίους $1, 2, 3, \dots, 2018$ δεν διαιρούνται ούτε με το 5 ούτε με το 11.
12. Να βρεθεί διψήφιος αριθμός αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι 8 και ότι ελαττώνεται κατά 18 αν αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του.
13. Να βρείτε τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους που δεν έχουν το 0 στα ψηφία τους και επιπλέον σε οποιαδήποτε μετάθεση των ψηφίων τους προκύπτει τριψήφιος θετικός ακέραιος που διαιρείται με το 4. (Ευκλείδης Α τ.111)
14. Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακεραίους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό; (Θαλής 2019)
15. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος A διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς A . (Θαλής 2017)
16. Όλα τα ψηφία του θετικού ακεραίου A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά στον αριθμό. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του A , αν αυτό διαιρείται με το 4 και με το 3. (Θαλής 2016)
17. Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι. Ισχύει ότι $(9 - \alpha)(9 - \beta)(9 - \gamma)(9 - \delta) = 9$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta$
18. Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4. (Θαλής 2021)

19. Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό 2023 ώστε να προκύψει αριθμός τέλειο τετράγωνο.

Λύσεις

$$\begin{aligned} 1. & 138 = 2 \cdot 3 \cdot 23, \\ & 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, \\ & 2023 = 7 \cdot 17^2, \\ & 7070 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101 \end{aligned}$$

2. Ο αριθμός 64

3. Ο αριθμός 2520

4. 9900, 5544, 1188

5. 132, 312

6. Το τελευταίο ψηφίο είναι το 7.

7. Ο αριθμός πρέπει να διαιρείται με το 2 και το 9. Συνεπώς ο αριθμός είναι ο 85878.

8. Οι δυνατές τιμές του ακεραίου a είναι $-1, 1, -2, 2, -4, 4$

9. Οι δυνατές τιμές του ακεραίου $a - 1$ είναι $-1, 1, -2, 2, -4, 4$. Συνεπώς οι δυνατές τιμές του ακεραίου a είναι $0, 2, -1, 3, -3, 5$.

10. 8999, 9899, 9989, 9998

11. Τα πολλαπλάσια του 5 είναι 403. Τα πολλαπλάσια του 11 είναι 183. Τα πολλαπλάσια του 55 είναι 36. Τα πολλαπλάσια του 5 και του 11 είναι $403 + 183 - 36 = 550$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : $2018 - 550 = 1468$

12. $a + b = 8$ δηλ. $b = 8 - a$ και $10a + b - 18 = 10b + a$, τότε $9a - 18 = 9b$, τότε $a - 2 = b$ και τότε $a = 5, b = 3$

13. Δεν είναι δεκτά τα περιττά ψηφία. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : 444, 888, 448, 484, 844, 884, 848, 488

14. 22 ακέραιοι μπορούν να γίνουν ζευγάρια. Οι υπόλοιποι είναι 1, 17, 19, 23 από τους οποίους προκύπτει ένα ακόμα ζευγάρι. Συνεπώς ο μεγαλύτερος αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.

15. 5553, 5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559, 5886, 8586, 8856, 8883

16. 8988

17. Το άθροισμα είναι ίσο με 36.

18. Πρέπει το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο άρτιος να είναι διάφορο του 0. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι : 804, 824, 844, 864, 884, 612, 632, 652, 672, 692

19. $2023 = 7 \cdot 17^2$. Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 7 διότι : $7 \cdot 2023 = 7^2 \cdot 17^2 = (7 \cdot 17)^2$