Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. (Αλγεβρα Α Λυκείου 2.2)

2. Να δείξετε ότι $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. (Αλγεβρα Α Λυκείου 2.2)

3. Να δείξετε ότι $a^2 - a + 1 \geq 0$ όπου a πραγματικός αριθμός.

4. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση: $x^6 + 26x^3y^3 - 27y^6$ (Θαλής 2018)

5. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση: $x^7 + x^6 + x^5 + 1$ (Θαλής 2017)

6. Να προσδιορίσετε την τιμή του ακεραίου a για την οποία ο ακέραιος $A = (a^2 + 18)^2 - (8a + 1)^2$ είναι πρώτος. (Θαλής 2016)

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a ισχύει η ανισότητα: (Θαλής 2016)
$$\frac{(2a+1)(2a+3)(2a+5)(2a+7)}{a(a+1)(a+2)(a+3)} > 16\sqrt{\frac{a+4}{a}}$$

8. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης (Θαλής 2014) :
$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

9. Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος $\dfrac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$ είναι θετικός ακέραιος. (Θαλής 2013)

10. Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακεραίους x, y, z για τους οποίους ισχύει ότι:
$$\frac{x}{2012x + 3} = \frac{y}{2012y + 5} = \frac{z}{2012z + 7}$$
και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y, z είναι διαιρέτης του 747. (Θαλής 2012)

11. Αν a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι: (Θαλής 2009)
$$\frac{4\sqrt{ab}}{a+b} \leq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{a+b}{2}$$

12. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25. (Θαλής 2008)

Υποδείξεις ασκήσεων

1. Πολλαπλασιάζουμε επί 2.

2. Πολλαπλασιάζουμε επί 2.

3. Πολλαπλασιάζουμε επί 2.

4. Διάσπαση όρου. Στη θέση του $26x^3y^3$ γράφω $-x^3y^3 + 27y^3y^3$

5. $x^5(x^2+1) + (x^2)^3 + 1 = \cdots = (x^2+1)(x+1)(x^4 - x + 1)$

6. Εκφράζω την παράσταση Α ως γινόμενο παραγόντων. Ο ένας παράγοντας πρέπει να είναι ίσος με 1. Τελικά $a = 4$

7. Ισχύει ότι $x + y > 2\sqrt{xy}$ για θετικούς x, y. Έστω $x = \dfrac{a+1}{a}, y = 1$, τότε $\dfrac{2a+1}{a} > 2\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ Εστω $x = \dfrac{a+2}{a+1}, y = 1$, τότε $\dfrac{2a+3}{a+1} > 2\sqrt{\dfrac{a+2}{a+1}}$ κλπ. και πολλαπλασιάζω κατά μέλη.

8. Η εξίσωση γίνεται $x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 5 - 2|x-y|$. Συνεπώς $(x-3y)^2 + (x+2y)^2 = 5 - 2|x-y|$. Πρώτο μέλος ≥ 0, τότε και δεύτερο μέλος ≥ 0. Συνεπώς $|x-y| \in \{0, 1, 2\}$. Συνεπώς λύσεις είναι τα ζευγάρια $(-1,-1), (1,1), (3,1), (-3,-1)$

9. $\dfrac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + (1+\lambda)x - 2(2+\lambda) = 0$. Θέλουμε $\Delta = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 \geq 0$. Αν $\lambda = 2$ τότε $x = \dfrac{8}{3}$. Αν $\lambda = 2$ τότε $x = -1 \pm \sqrt{7}$. Αν $\lambda \geq 3$ τότε $\Delta < 0$.

10. Με αντιστροφή των κλασμάτων προκύπτει ότι $\dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{y} = \dfrac{7}{z} = \dfrac{1}{\lambda}$. Τότε $x^2 + y^2 + z^2 = 83\lambda^2 | 747 \Rightarrow \lambda^2 | 9$. Αν $\lambda = 1$, τότε $(x,y,z) = (3,5,7)$. Αν $\lambda = -1$, τότε $(x,y,z) = (-3,-5,-7)$. Αν $\lambda = 9$, τότε $(x,y,z) = (9,15,21)$. Αν $\lambda = -9$, τότε $(x,y,z) = (-9,-15,-21)$.

11. Ισχύει ότι $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ και $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \dfrac{a+b}{ab} \geq \dfrac{4}{a+b}$. Πολλαπλασιάζω κατά μέλη.

12. $S = 100x_1 + 15 + \cdots + 100x_{15} + 15 = 100X + 15 \cdot 15 = 25(4X + 9)$