Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 3.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 αν το τελευταίο **διψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 4.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται με το 2 και με το 3
- Ενας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 8 αν το τελευταίο **τριψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων διαιρείται με το 9.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 αν διαιρείται με το 2 και με το 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11 αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις ή αν η διαφορά των δύο αθροισμάτων είναι πολλαπλάσια του 11. πχ. 121, 143, 651343, 123454321, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121, 9182712

Υπενθύμιση

- Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ψηφία ακεραίων

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \overline{\alpha\beta\gamma} \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιούμε τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- άρτιος · άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος · περιττός = άρτιος
- για κάθε ακέραιο x, ο αριθμός $x(x+1)$ είναι άρτιος
- για κάθε ακέραιο x, το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων $x+(x+1)+(x+2) = 3x+3 = 3(x+1)$ είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3.
- αν $\alpha = \beta + \gamma$ και ένας ακέραιος x διαιρεί τους δύο από τους α, β, γ, τότε υποχρεωτικά διαιρεί και τον τρίτο. πχ. αν $5\alpha = 75 + \beta$, το 5 διαιρεί το 5α και το 5 διαιρεί το 75 συνεπώς το 5 διαιρεί και το β.
- αν $\alpha = \beta \cdot \gamma$ και δύο από τους α, β, γ, είναι τέλεια τετράγωνα, τότε και ο τρίτος είναι σίγουρα τέλειο τετράγωνο. πχ. αν $100 = \beta \cdot 4$, τότε ο β είναι σίγουρα τέλειο τετράγωνο.
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο

- για κάθε ακέραιο x το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x^5 είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x.
- αν a, b, c είναι ανάλογοι των $3, 4, 5$ αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$,
τότε $a = 3k, b = 4k, c = 5k$
- $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
- $121 = 11 \cdot 11$
- $12321 = 111 \cdot 111$
- $\overline{abab} = ab \cdot 100 + ab = ab \cdot (100 + 1) = ab \cdot 101$
- πχ. $2323 = 23 \cdot 100 + 23 = 23 \cdot (100 + 1) = 23 \cdot 101$
- $\overline{ababab} = ab \cdot 10000 + ab \cdot 100 + ab = ab \cdot (10000 + 100 + 1) = ab \cdot 10101$
- πχ. $454545 = 45 \cdot 10000 + 45 \cdot 100 + 45 = 45 \cdot (10000 + 100 + 1) = 45 \cdot 10101$
- $\overline{abcabc} = abc \cdot 1000 + abc = abc \cdot (1000 + 1) = abc \cdot 1001$
- πχ. $123123 = 123 \cdot 1000 + 123 = 123 \cdot (1000 + 1) = 123 \cdot 1001$

Ασκήσεις

1. Να αναλύσετε τον αριθμό 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.
2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $A = \overline{2023xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης. Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17. (Θαλής 2023)
3. Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου a, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-a}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις. (Θαλής 2018)
4. Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μια φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο το δυνατόν περισσότερους από τους ακεραίους 2,3,4,5,6,7,8,9. (Θαλής 2017)
5. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός από τους 7 δεδομένους που διαιρείται με το 10. (Θαλής 2023)
6. Να βρείτε τους τριψήφιους οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση : Ο διψήφιος που προκύπτει αν σβήσουμε το μεσαίο ψηφίο είναι ίσος με το $\frac{1}{9}$ του τριψηφίου. (Καγκουρό 2018 Γ Γυμν. πρόβλημα 18)
7. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $ababab$, όπου a, b είναι ψηφία με διαιρείται με το 7. (Καγκουρό 2017 Γ Γυμν. πρόβλημα 24)
8. Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (Θαλής 2021)

9. Τοποθετούμε σε σειρά όλους τους θετικούς ακέραιους διαιρέτες του ακέραιου 4654650 από το μεγαλύτερο μέχρι το μικρότερο. Έτσι πρώτος στη σειρά είναι ο 4654650 και τελευταίος είναι ο 1. Να προσδιορίσετε το δέκατο στη σειρά διαιρέτη. (Θαλής 2021 συμπληρωματικός)

10. Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν Α κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός Α, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης. (Θαλής 2022)

Λύσεις

2. $2023 = 17 \cdot 11900$. Πρέπει $xy \in \{17, 34, 51, 68, 85\}$

3. Για $a \neq 5$ είναι $x = \dfrac{2a-6}{a-5} = \dfrac{2a-10+4}{a-5} = \dfrac{2(a-5)+4}{a-5} = 2 + \dfrac{4}{a-5}$. Πρέπει $a-5$ διαιρέτης του 4. Συνεπώς το $a-5$ μπορεί να πάρει τις τιμές $-1, 1, -2, 2, -4, 4$ και τότε το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 6, 7, 9$. Τότε το x μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 0, -2, 6, 4, 3$. Πρέπει $x \neq 6$ και συνεπώς $a \neq 6$. Τελικά το a μπορεί να πάρει τις τιμές $1, 3, 4, 7, 9$.

4. Ο ζητούμενος αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων (πολλαπλάσιο του 3 + 1), και δεν έχει τελευταίο ψηφίο του 0 ή 5, συνεπώς δεν διαιρείται με τους : 3,6,9,5. Συνεπώς αναζητούμε τον μικρότερο αριθμό ο οποίος θα διαιρείται με τους: 2,4,7,8. Τελικά ο μικρότερος είναι ο 6664.

5. Οι άρτιοι είναι τουλάχιστον 4. Τα πολλαπλάσια του 5 είναι τουλάχιστον 4. Συνεπώς τουλάχιστον ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιος και του 2 και του 5, συνεπώς και του 10.

6. $\dfrac{1}{9} \cdot (100a + 10b + c) = 10a + c$, τότε $5(a+b) = 4c$, τότε $c = 5, a + b = 4$, τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι $135, 225, 315, 405$

7. $ababab = (10^4 + 10^2 + 1)(10a + b) = 10101 \cdot (10a + b) = 1443 \cdot 7 \cdot (10a + b)$

8. 999992

9. $4654650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$, οι μικρότεροι διαιρέτες είναι οι $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14$, τότε ο 10ος μεγαλύτερος είναι ο $\dfrac{4654650}{14} = 332475$

10. $A = 36163$