Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και ύψος και διχοτόμος.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διάμεσος και διχοτόμος.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος που συναντά τη βάση είναι και διάμεσος και ύψος.
- Τα παραπάνω ισχύουν και στα ισόπλευρα τρίγωνα.
- Ισοσκελές τρίγωνο με μια γωνία ίση με 60^o είναι ισόπλευρο.
- Αν σε ένα τρίγωνο ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει ταυτόχρονα **δύο** από τους ρόλους : διάμεσος, ύψος, διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του, συνεπώς δημιουργεί ισοσκελή τρίγωνο.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.
- Εάν δύο σημεία ισαπέχουν από τα άκρα του ίδιου ευθυγράμμου τμήματος, τότε τα δύο αυτά σημεία βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετό του.
- Σε κύκλο, η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης, όταν αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου.
- Σε κύκλο, οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.
- Σε κύκλο, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $30^o, 45^o, 60^o$

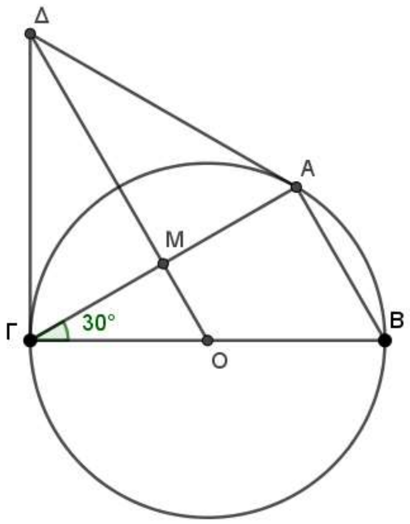
	30°	45°	60°
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Υπόδειξη

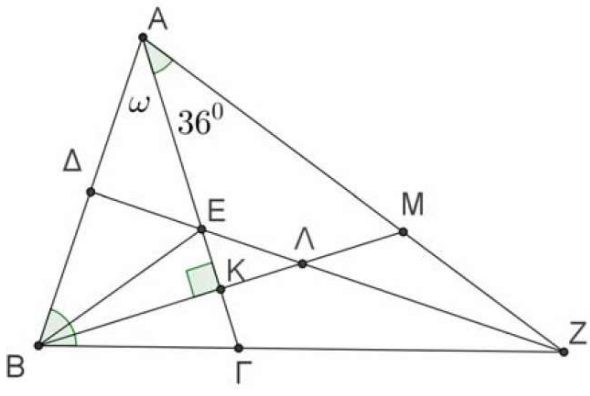
Χρησιμοποιήστε χάρακα και διαβήτη για την κατασκευή μεσοκαθέτων, ισοσκελών τριγώνων και ισοπλεύρων τριγώνων.

Ασκήσεις

1. Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου ΒΓ και ΑΒΓ τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο με $A\hat{\Gamma}B = 30^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.
α) Να δείξετε ότι η ΔΟ είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΓA.
β) Να δείξετε ότι η ΔΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}A$.
γ) Να εκφράσετε το τμήμα ΑΒ συναρτήσει της ακτίνας R.
δ) Να εκφράσετε το τμήμα ΑΓ συναρτήσει της ακτίνας R.
ε) Να εκφράσετε το τμήμα ΓΜ συναρτήσει της ακτίνας R.
ζ) Να εκφράσετε το τμήμα ΔΜ συναρτήσει της ακτίνας R.
η) Να εκφράσετε το τμήμα ΔΟ συναρτήσει της ακτίνας R.
(Υπόδειξη:Σχεδιάστε την ακτίνα ΟΑ)

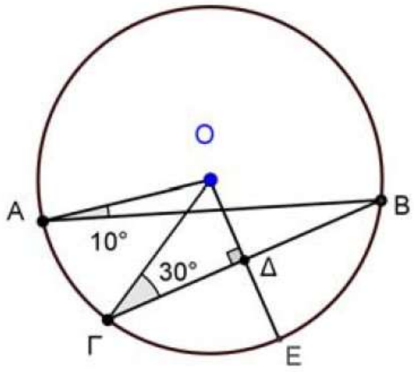


2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = w^o$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{A}Z = 36^o$, να αποδείξετε ότι: (α) $w = 36^o$, (β) ΑΜ = ΓΖ, (γ) ΒΛ = ΛΖ. (Θαλής 2015)

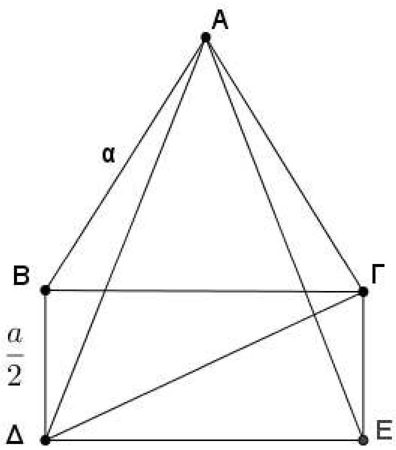


3. Σε κύκλο $c(O, R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας Ρ) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $O\hat{A}B = 10^o$ και $O\hat{\Gamma}B = 30^o$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο c στο σημείο Ε.
(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου ΑΓ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδόν του. (Θαλής 2013)

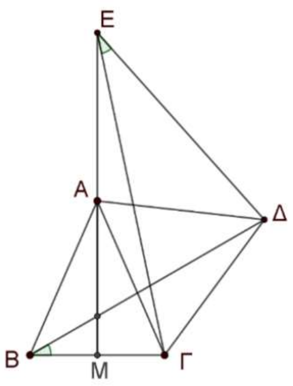


4. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $B\Delta = \dfrac{\alpha}{2}$
α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΕ
β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ. (Θαλής 2017)



Θαλής 2017

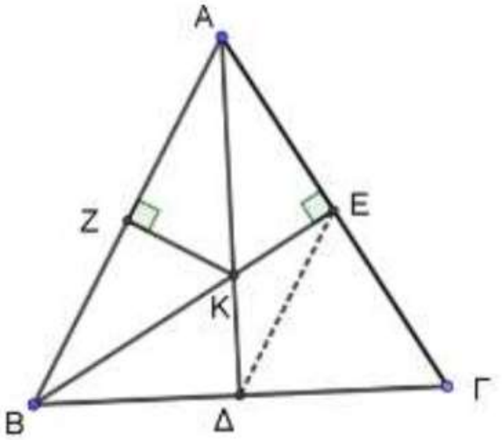
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $A\Gamma > B\Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta = 30^o$ (Θαλής 2020)



Θαλής 2020

Ασκήσεις

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.
α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΚΔ=ΚΕ=ΚΖ. (Θαλής 2021)



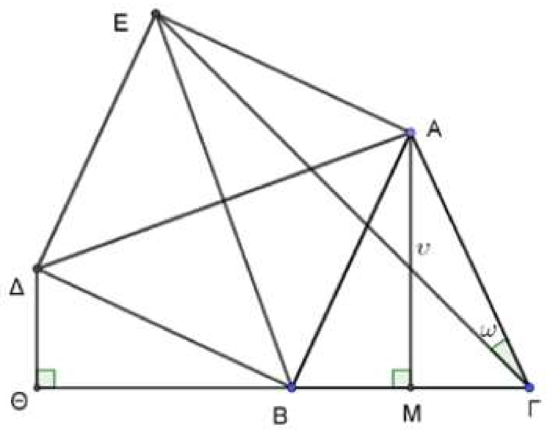
7. (Θαλής 2022)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $A\hat{\Gamma}E = \omega$, $\Delta\hat{\Theta}B = 90^0 = A\hat{M}B$ και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \upsilon$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και υ.



8. (Θαλής 2018)

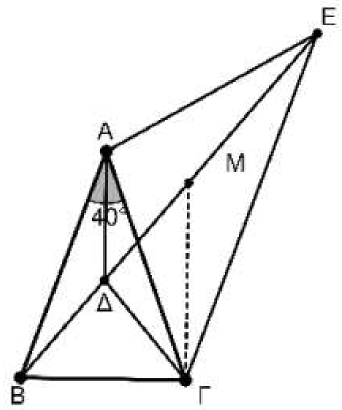
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A} = 40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ. Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:

(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

(β) $\Gamma\widehat{A}E = 100°$.

(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.

Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



9. (Θαλής 2019)

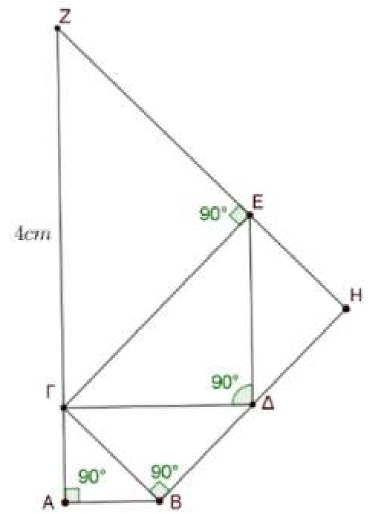
Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma, \Delta\hat{B}\Gamma, E\hat{\Delta}\Gamma$ και $Z\hat{E}\Gamma$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $AB = A\Gamma$, $B\Gamma = B\Delta$, $\Delta\Gamma = \Delta E$, $E\Gamma = EZ$ και $\Gamma Z = 4\ cm$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

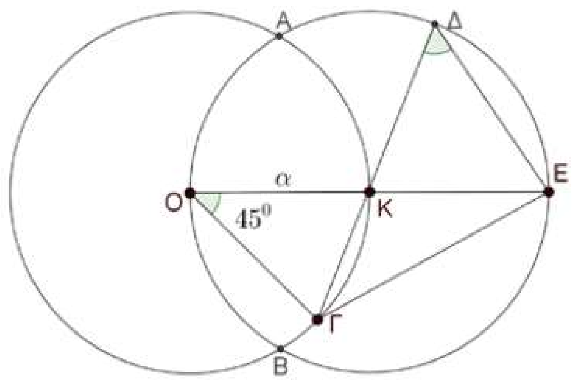


10. (Θαλής 2016)

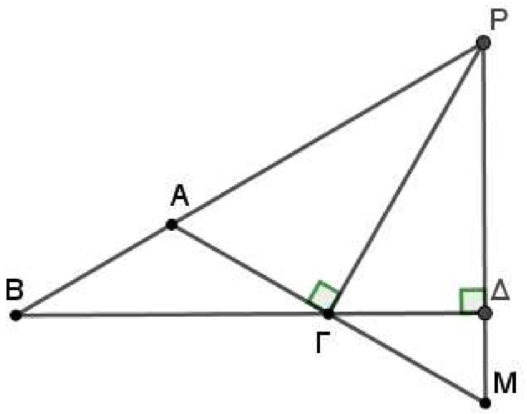
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $K\hat{O}\Gamma = 45^\circ$, να βρείτε :

(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $K\hat{\Delta}E$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α.



11. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και γωνία $\hat{A}$ αμβλεία. Έστω Μ συμμετρικό της κορυφής Α ως προς την κορυφή Γ. Η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΜ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο σημείο Ρ. Η προέκταση του τμήματος ΒΓ τέμνει το τμήμα ΑΜ στο σημείο Δ. Αν τα τμήματα ΡΜ και ΒΓ είναι κάθετα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΡΜ είναι ισόπλευρο.



12. Στο παρακάτω σχήμα έστω τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΔΕΖΗ και ΘΙΚΛ.
α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει της πλευράς ΑΒ.
β) Να εκφράσετε την πλευρά ΚΛ συναρτήσει της πλευράς ΑΒ.