

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία - Παράρτημα Καρδίτσας
6ος τοπικός μαθητικός διαγωνισμός μαθηματικών 'Νικόλαος Νικολάου'

7 Νοεμβρίου 2025

Ενδεικτικές λύσεις

Α' Γυμνασίου

1) Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$B = 100 \cdot \left(3 + 12 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \cdot 15}{19} \right)^3$$

$$\Gamma = \frac{A}{B}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 25 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 4 \\ &= 100 \cdot 100 \cdot 100 \\ &= 1000000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 100 \cdot \left(3 + 12 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \cdot 15}{19} \right)^3 \\ &= 100 \cdot \left(3 + \frac{12}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{400 - 210}{19} \right)^3 \\ &= 100 \cdot \left(3 + 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{190}{19} \right)^3 \\ &= 100 \cdot \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \right)^3 \\ &= 100 \cdot (5 + 5)^3 \\ &= 100 \cdot 10^3 \\ &= 100000 \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{A}{B} = \frac{1000000}{100000} = 10$$

- 2) Να χρησιμοποιήσετε όλους τους *πρώτους* αριθμούς οι οποίοι είναι μικρότεροι του 20, μόνο μια φορά τον καθένα, στη θέση των κενών τετραγώνων του παρακάτω κλάσματος, ώστε το κλάσμα να είναι ίσο με το μεγαλύτερο δυνατό φυσικό αριθμό.

$$\frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{\square}$$

Λύση

Οι 8 πρώτοι αριθμοί, οι οποίοι είναι μικρότεροι του 20, είναι οι εξής: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

Ισχύει ότι $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77$

Αν αφαιρέσουμε το 2 από το άθροισμα 77, τότε σχηματίζουμε το κλάσμα: $\frac{75}{2}$ το οποίο είναι ανάγωγο.

Αν αφαιρέσουμε το 3 από το άθροισμα 77, τότε σχηματίζουμε το κλάσμα: $\frac{74}{3}$ το οποίο είναι ανάγωγο.

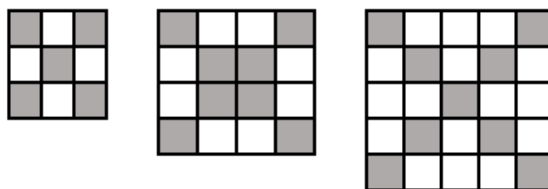
Αν αφαιρέσουμε το 5 από το άθροισμα 77, τότε σχηματίζουμε το κλάσμα: $\frac{72}{5}$ το οποίο είναι ανάγωγο.

Αν αφαιρέσουμε το 7 από το άθροισμα 77, τότε σχηματίζουμε το κλάσμα: $\frac{70}{7} = 10$.

Αν αφαιρέσουμε το 11 από το άθροισμα 77, τότε σχηματίζουμε το κλάσμα: $\frac{66}{11} = 6$.

Αν αφαιρέσουμε είτε το 13 είτε το 17 είτε το 19, το κλάσμα είναι ανάγωγο. Συνεπώς ο μεγαλύτερος δυνατός φυσικός αριθμός που ισούται με το κλάσμα είναι ο αριθμός 10.

- 3) Τα παρακάτω τετράγωνα χωρίζονται σε μικρότερα ίσα τετράγωνα. Σε κάθε τετράγωνο χρωματίζουμε γκρι μόνο τα τετράγωνα από τα οποία περνάνε οι *διαγώνιοι* του μεγάλου τετραγώνου. Αν συνεχίσουμε το ίδιο μοτίβο θα φτάσουμε σε ένα μεγάλο τετράγωνο το οποίο θα περιέχει 37 γκρι μικρά τετράγωνα. Να υπολογίσετε πόσα μικρά τετράγωνα περιέχει το τελευταίο τετράγωνο.



Λύση

Κάθε τετράγωνο με *άρτιο* αριθμό σειρών περιέχει 2 γκρι τετράγωνα σε κάθε σειρά. Κάθε τετράγωνο με *περιττό* αριθμό σειρών περιέχει 1 γκρι τετράγωνο στη μεσαία σειρά και 2 γκρι τετράγωνα σε κάθε άλλη σειρά. Καθότι ο αριθμός 37 είναι περιττός, το τετράγωνο που αναζητούμε θα έχει περιττό αριθμό σειρών.

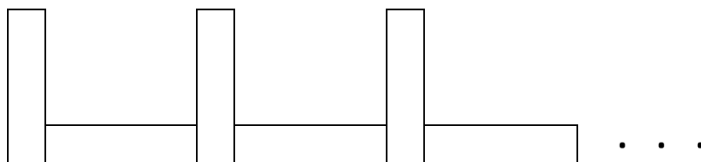
Ισχύει ότι : $37 = 36 + 1 = 18 \cdot 2 + 1 \cdot 1$

Συνεπώς το τετράγωνο που αναζητούμε θα έχει $18 + 1 = 19$ σειρές.

Το τετράγωνο με τις 19 σειρές περιέχει $19 \cdot 19 = 361$ μικρότερα ίσα τετράγωνα.

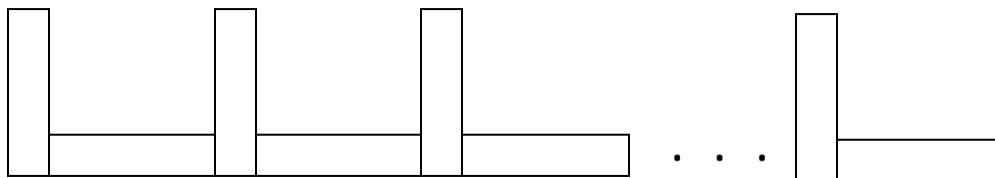
Παρατήρηση : τα λευκά τετράγωνα είναι $361 - 37 = 324$.

- 4) Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από 100 ίσα ορθογώνια. Η τοποθέτηση τους ακολουθεί το ίδιο μοτίβο. Σε κάθε ορθογώνιο, η μεγάλη πλευρά είναι ίση με $3cm$ και η μικρή πλευρά είναι ίση με $1cm$. Να υπολογίσετε την *περίμετρο* του παρακάτω σχήματος.

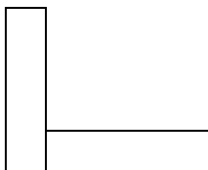


Λύση

Σχηματίζουμε και τα τελευταία 2 ορθογώνια και έχουμε το παρακάτω σχήμα :



Το σχήμα αποτελείται από 50 ζευγάρια ορθογώνιων.



Το πρώτο ζευγάρι ορθογώνιων έχει περίμετρο ίση με $3 + 1 + 3 + 1 + 2 + 3 = 13$

Κάθε επόμενο ζευγάρι ορθογώνιων από 2ο μέχρι και το 49ο έχει περίμετρο ίση με $3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 = 12$

Το τελευταίο ζευγάρι ορθογώνιων έχει περίμετρο ίση με $3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 1 = 13$

Συνεπώς η ζητούμενη περίμετρος είναι ίση με $2 \cdot 13 + 48 \cdot 12 = 26 + 576 = 602$