

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

1. Ιδιότητες δυνάμεων
2. Ευκλείδεια διαίρεση : $\Delta = \delta \cdot \pi + \nu$, το υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο του διαιρέτη ($\nu < \delta$).
3. Ταυτότητες
4. Παραγοντοποίηση
5. Υπολογισμός τιμής αριθμητικής παράστασης με τη βοήθεια ταυτότητας
6. Σε ασκήσεις εύρεση ψηφίων χρησιμοποιούμε τους περιορισμούς των ψηφίων ώστε να δημιουργήσουμε ανισότητα. πχ. για το διψήφιο xy ισχύει ότι $1 \leq x \leq 9$ και $0 \leq y \leq 9$. Έτσι με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ανισότητα $1 \leq x + y \leq 18$.
7. Δύο πολυώνυμα είναι ίσα όταν οι συντελεστές των όρων με ίδιο εκθέτη είναι ίσοι.
8. Ταυτότητα *Euler* : Αν $a + b + c = 0$ τότε $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (πχ. πρόβλημα 2017 και 2019)
9. Σε εξίσωση της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$, αν οι διαιρέτες του P έχουν άθροισμα S , τότε επιλέγουμε τη διάσπαση του S για να προκύψουν κοινοί παράγοντες. πχ. $x^2 - 18x + 65 = 0$

Ασκήσεις

1. Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $16^3 \cdot 5^6$
2. Να βρείτε θετικούς ακεραίους a, b για τους οποίους ισχύει ότι: $a^2 = b^2 + 2019$
3. Ένας εργάτης εργάστηκε επί 10 ημέρες και τελείωσε τα $\frac{2}{7}$ κάποιου έργου. Τότε ήρθε και ένας δεύτερος εργάτης. Στη συνέχεια εργάζονται και οι δύο και τελειώνουν το έργο σε 18 ακόμη ημέρες. Να βρεθεί σε πόσες ημέρες μπορεί να τελειώσει το έργο ο δεύτερος, αν εργαζόταν μόνος του από την αρχή.
4. Αν οι θετικοί x, y ικανοποιούν την ισότητα $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{x + 2y}{x - 2y}$ (Ευκλείδης 2009)
5. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x - 1)(2x + 1) + x = 4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 4031 \cdot 4033 \cdot 32256 + 32256$ ισούται με κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε. (Ευκλείδης 2016)
6. Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα. (Ευκλείδης 2016)
7. Οι πλευρές a, b, c ενός τριγώνου ικανοποιούν τις σχέσεις $c^2 = 2ab$ και $a^2 + c^2 = 3b^2$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
8. Ποια είναι η μικρότερη τιμή με την οποία πρέπει να πολλαπλασιάσετε την παράσταση $12x^3$ ώστε να προκύψει τέλειος κύβος;
9. Ο Νίκος οδήγησε για ακέραιο αριθμό ωρών με μέση ταχύτητα 55 km/h . Στην αρχή του ταξιδιού του, το κοντέρ είχε την ένδειξη abc και στο τέλος του ταξιδιού είχε την ένδειξη cba , όπου $a \geq 1$ και $a + b + c \leq 7$. Πόσες ώρες ταξίδεψε ο Νίκος και ποια ήταν η αρχική ένδειξη στο κοντέρ του;

Υποδείξεις ασκήσεων

2. Είναι $(a - b)(a + b) = 3 \cdot 673$ τότε $a - b = 3$ και $a + b = 673$, τότε $a = 338, b = 335$

3. Είναι $(\frac{1}{35} + \frac{1}{x}) \cdot 18 = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 90$

4. Είναι $A = 2$ ή $A = -2$

6. Είναι $6(\frac{x}{4} + \frac{y}{12}) = \frac{3x}{4} + \frac{11y}{12} \Leftrightarrow 9x = 5y$. Πρέπει x πολλαπλάσιο του 5 και πολλαπλάσιο του 4. Συνεπώς $x = 20, y = 36, x + y = 56$

7. Είναι $a^2 + 2ab - 3b^2 = 0, (a - b)(a + 3b) = 0, a = b, c = a\sqrt{2}$, ισχύει το ΠΘ διότι $a^2 + b^2 = c^2$. Συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8. Είναι $18 \cdot 12 \cdot x^3 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot x^3 = (6x)^3$