

Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

- Κανόνες διαιρετότητας για τους ακεραίους : 2, 3, 5, 9
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 αν το τελευταίο **διψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 4.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται με το 2 και με το 3
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 8 αν το τελευταίο **τριψήφιο** τμήμα του διαιρείται με το 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11
αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις ή
αν η διαφορά των προηγούμενων αθροισμάτων είναι πολλαπλάσια του 11
πχ. 121, 143, 704, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121, 651343, 223454121
- Ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (Ευκλείδης 2014)
- Έλεγχος εάν ένας αριθμός είναι πρώτος. Διαιρώ τον αριθμό με τους πρώτους οι οποίοι είναι μικρότεροι της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού που ελέγχω.

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma}$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \overline{\alpha\beta\gamma} \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιώ τα εξής :

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- πρόσθεση ή αφαίρεση ή ύψωση σε δύναμη ίδιου παράγοντα σε κάθε μέλος μιας εξίσωσης
- άρτιος $\cdot$ άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος $\cdot$ περιττός = άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακεραίους που έχουν την ιδιότητα : Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.
(Ευκλείδης 2009, Ευκλείδης Α τ.71)
2. Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του; (Ευκλείδης 2010, Ευκλείδης Α τ.75)

3. Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $A = \alpha\beta\gamma$, όπου α, β, γ ψηφία με $\alpha \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος B που είναι μικρότερος από τον A κατά 396. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A . Να βρείτε τον αριθμό A . (Ευκλείδης 2008, Ευκλείδης Α τ.67)
4. Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = abc = 100a + 10b + c$, αν ισχύουν οι προτάσεις :
- $A-B=198$, όπου $B = cba = 100c + 10b + a$
 - Η εξίσωση $\frac{x+a-2c}{2a-c} - \frac{a-2c}{x} = 1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.
 - Ο αριθμός A διαιρείται με το 9.
- (Ευκλείδης 2011, Ευκλείδης Α τ.79)
5. Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + 1z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$. (Ευκλείδης 2015, Ευκλείδης Α τ.95)
6. Βρείτε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους $A = abcd$, που είναι τέτοιτοι ώστε ο ακέραιος που προκύπτει μετά τη διαγραφή οποιουδήποτε ψηφίου τους διαιρεί τον αρχικό ακέραιο A . (Ευκλείδης Α τ.86)
7. α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5 .
β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ του 1 και του 10^5 (Ευκλείδης 2017).
8. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (a, b) που ικανοποιούν την εξίσωση: $ab + 5a + 2b = 121$ (Ευκλείδης τ.115, σ.34)
9. Να βρείτε πόσα τέλεια τετράγωνα ακεραίων είναι μεγαλύτερα του 4^9 και μικρότερα του 9^4 (Ευκλείδης Α τ.107)
10. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός $A = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2}$ είναι ακέραιος (Ευκλείδης 2024).
11. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής $\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta$, με $\alpha \neq 0, \beta$ ψηφία.
(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.
(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων (Ευκλείδης 2024).
12. Ο τετραψήφιος ακέραιος $\overline{aabb}$ όπου a, b ψηφία είναι ίσος με τετράγωνο ακεραίου. Να βρείτε τον τετραψήφιο.
13. Ο Νίκος οδήγησε για ακέραιο αριθμό ωρών με μέση ταχύτητα 55 km/h . Στην αρχή του ταξιδιού του, το κοντέρ είχε την ένδειξη abc και στο τέλος του ταξιδιού είχε την ένδειξη cba , όπου $a \geq 1$ και $a + b + c \leq 7$. Πόσες ώρες ταξίδεψε ο Νίκος και ποια ήταν η αρχική ένδειξη στο κοντέρ του;
14. Έστω x, y θετικοί ακέραιοι ώστε $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του y .

Υποδείξεις ασκήσεων

1. $a \cdot b + 4(a + b) = 10a + b$, τότε $a \cdot b = 3(2a - b)$. Αν $a = 3$ τότε $b = 3$. Αν $a = 6$ τότε $b = 4$
2. $10a + b = a \cdot b - (a + b)$, τότε $(b - 11)a = 2b$, τότε αρνητικός = θετικός, αδύνατον. Συνεπώς δεν υπάρχει ο ζητούμενος ακέραιος.
3. $A - B = 396$ τότε $c = a - 4$. Επίσης $A - 41 = 50(a + b + c)$ τότε $50a - 40b - 49c = 41$ Τότε $a = 40b - 155$
Επίσης $1 \leq a \leq 9$ τότε $1 \leq 40b - 155 \leq 9$ τότε $\frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40}$. Τότε $b = 4, a = 5, c = 1$ Τότε $A = 541$
4. $A - B = 198$ τότε $99(a - c) = 198$ τότε $a - c = 2$. $\frac{x + a - 2c}{2a - c} - \frac{x + a - 2c}{x} = 0$, τότε $(x + a - 2c)(\frac{1}{2a - c} - \frac{1}{x}) = 0$, τότε $(x + a - 2c)\frac{x - 2a + c}{(2a - c)x} = 0$, τότε $x = 2c - a$ ή $x = 2a - c$. Πρέπει $2c - a + 2a - c = 4$ τότε $a + c = 4$ Τότε $a = 3, c = 1$. Συνεπώς $A = 351$
5. Είναι $xyz = 43(x + y + z) + 9$ και $zyx = 30(x + y + z) + 6$ και τότε $xyz - zyx = 99(x - z) = 13(x + y + z) + 3$. Πρέπει ο διαιρέτης $x + y + z$ να είναι μεγαλύτερος από το υπόλοιπο 9. Συνεπώς πρέπει $10 \leq x + y + z \leq 23$. Συνεπώς $10 \cdot 13 + 3 \leq 13(x + y + z) + 3 \leq 23 \cdot 13 + 3$. Συνεπώς $133 \leq 99(x - z) < 302$. Πρέπει $x - z = 2$ ή $x - z = 3$. Αν $x - z = 2$ τότε $x + y + z = 15$ και $xyz = 654$. Αν $x - z = 3$ τότε δεν προκύπτει ακέραια λύση.
6. 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900, 1200, 2400, 3600, 4800, 1500
7. Υπάρχουν $99999/9 = 11111$ πολλαπλάσια του 9. Υπάρχουν $99996/6 = 16666$ πολλαπλάσια του 9. Είναι ΕΚΠ(6,9)=18. Υπάρχουν $99990/18 = 5555$ κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Συνεπώς υπάρχουν $11111 + 16666 - 5555 = 22222$ πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.
8. $ab + 5a + 2b + 10 = 121 + 10$, τότε $(a + 2)(b + 5) = 131$. Ο αριθμός 131 είναι πρώτος, συνεπώς $(a + 2 = 1$ και $b + 5 = 131)$ ή $(a + 2 = 131$ και $b + 5 = 1)$. Τότε $(a, b) = (-1, 126)$ ή $(129, -4)$.
9. $4^9 = (2^2)^9 = (2^9)^2 = 512^2$ και $9^4 = (3^2)^4 = (3^4)^2 = 81^2$. Συνεπώς τα ζητούμενα τετράγωνα είναι $511 - 82 + 1 = 430$.
12. $1100a + 11b = 11(100a + b)$. Πρέπει $100a + b = a0b$ να είναι πολλαπλάσιο του 11 και της μορφής $11 \cdot k^2$. Πρέπει, $a + b = 11$.
Αν $a = 2, b = 9$ είναι $209 = 11 \cdot 19$
Αν $a = 9, b = 2$ είναι $902 = 11 \cdot 82$
Αν $a = 3, b = 8$ είναι $308 = 11 \cdot 28$
Αν $a = 8, b = 3$ είναι $803 = 11 \cdot 73$
Αν $a = 4, b = 7$ είναι $407 = 11 \cdot 37$
Αν $a = 7, b = 4$ είναι $704 = 11 \cdot 64$
Αν $a = 5, b = 6$ είναι $506 = 11 \cdot 46$
Αν $a = 6, b = 5$ είναι $605 = 11 \cdot 55$
Τελικά πρέπει $a = 7, b = 4$ διότι μόνο το 64 είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε $7744 = 88^2$
14. $y = \frac{20x}{x - 20} = 20 + \frac{400}{x - 20}$. Μέγιστο y έχουμε όταν $x - 20$ γίνει ελάχιστο, δηλ. $x = 21$.