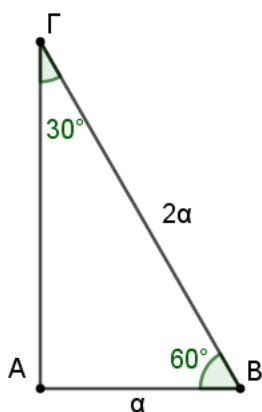


Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θεωρία

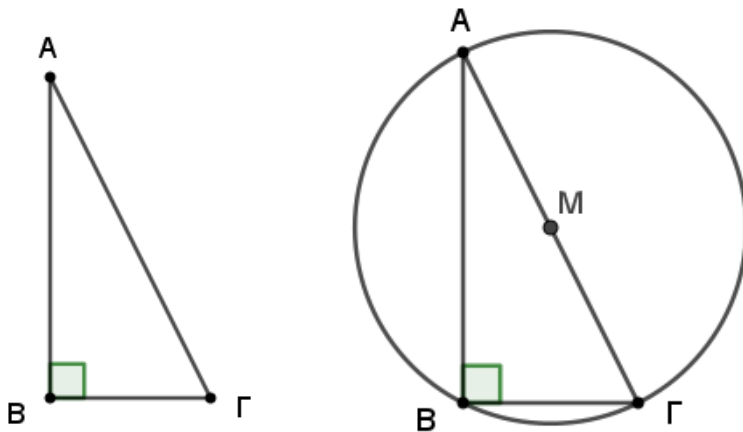
Για τη σωστή προετοιμασία, ο μαθητής πρέπει να έχει κατανοήσει τη Γεωμετρία της Α και της Β Γυμνασίου, ακόμα και τις ενότητες που πιθανώς δεν έχει διδαχθεί στο σχολείο.

- Σύγκριση τριγώνων (Γ Γυμνασίου)
- Ιδιότητες παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, ρόμβου, τετραγώνου, τραπεζίου, ισοσκελούς τραπεζίου
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και ύψος και διχοτόμος.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διάμεσος και διχοτόμος.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διχοτόμος που συναντά τη βάση είναι και διάμεσος και ύψος.
- Τα παραπάνω ισχύουν και στα ισοπλευρά τρίγωνα.
- Ισοσκελές τρίγωνο με μια γωνία ίση με 60° είναι ισοπλευρό.
- Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του, συνεπώς δημιουργεί ισοσκελή τρίγωνο.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.
- Εάν δύο σημεία ισαπέχουν από τα άκρα του ίδιου ευθυγράμμου τμήματος, τότε τα δύο αυτά σημεία βρίσκονται πάνω στη μεσοκάθετό του. (Θαλής 2018)
- Σε κύκλο, η επίκεντρη γωνία είναι διπλάσια της εγγεγραμμένης, όταν αυτές βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου.
- Σε κύκλο, οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες μεταξύ τους.
- Σε κύκλο, κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο, αν η μικρή κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, τότε το ορθογώνιο τρίγωνο έχει οξείες γωνίες ίσες με 30° και 60° και αντίστροφα
- Αν το ορθογώνιο τρίγωνο έχει οξείες γωνίες ίσες με 30° και 60° , τότε η μικρή κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

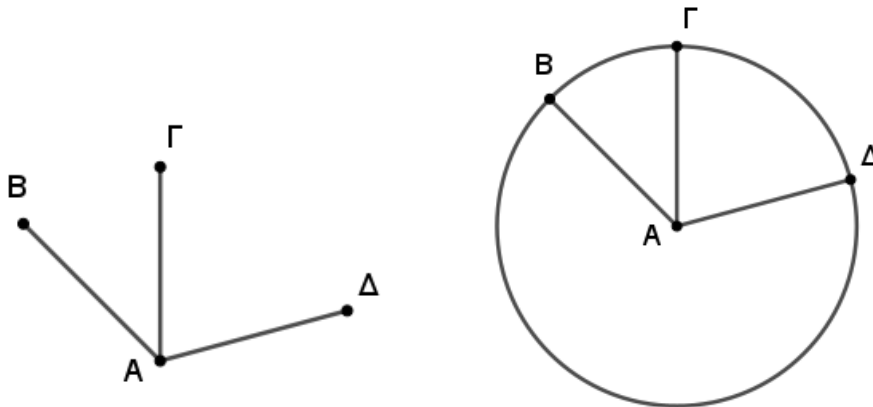


- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντίστροφα
- Αν ένα εσωτερικό σημείο μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της, τότε είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας.

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, από τις κορυφές του διέρχεται κύκλος με κέντρο το μέσο της υποτείνουσας του.

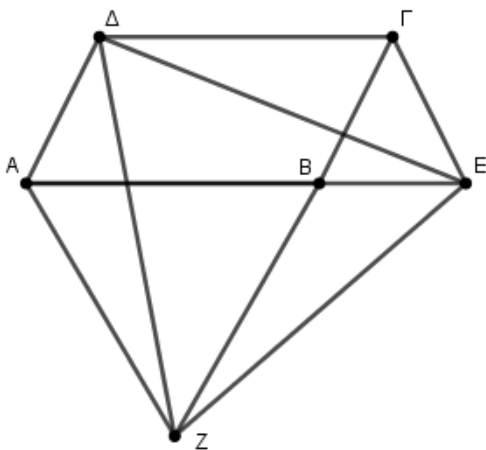


- Αν για ένα σημείο A ισχύει ότι $AB=AG=AD$, τότε υπάρχει κύκλος με κέντρο A και ακτίνα AB ο οποίος διέρχεται από τα σημεία B, Γ, Δ.

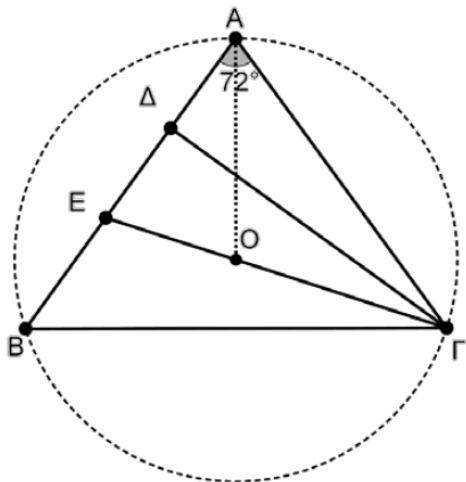


Ασκήσεις

1. Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $\hat{A} < 90^\circ$. Έστω σημείο E στην προέκταση του AB προς το μέρος του B, τέτοιο ώστε $GB=GE$. Έστω σημείο Z στην προέκταση του ΓB προς το μέρος του B, τέτοιο ώστε $AB=AZ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές. (Ευκλείδης Α τ.107 σ.27)

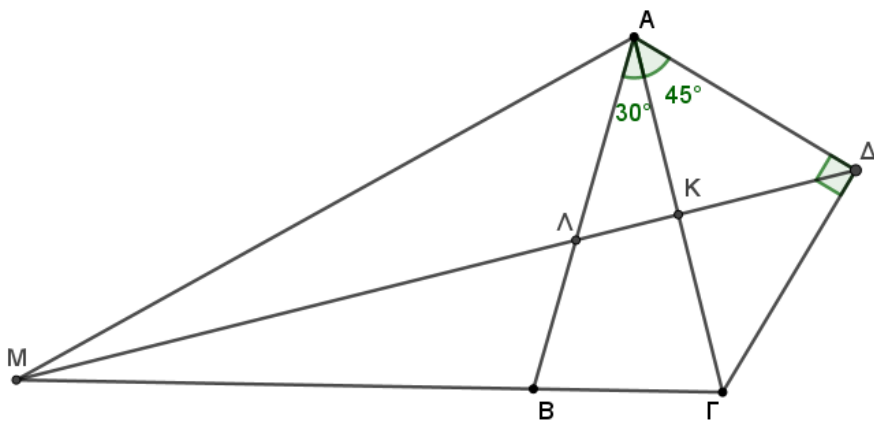


2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A} = 72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και E το συμμετρικό του A ως προς την $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓE περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου). (Ευκλείδης 2018)

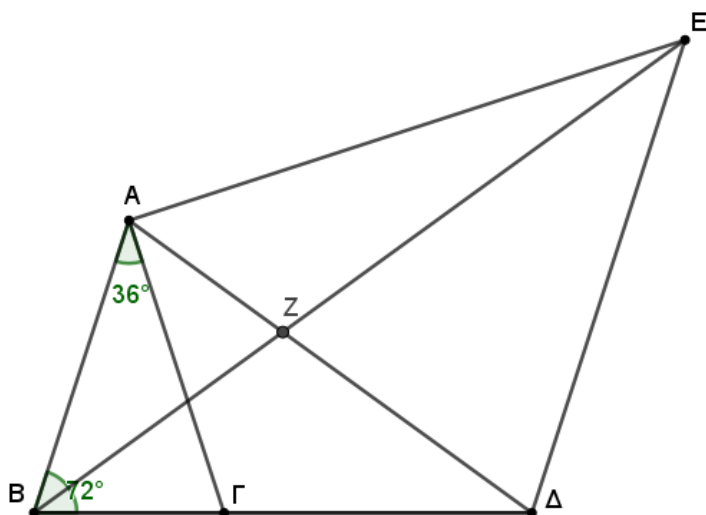


3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AG τέμνει την AG στο μέσο της K , την AB στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο σημείο M . Αν είναι $AD=a$, να υπολογίσετε συναρτήσει του a :

- (α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$,
 (β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM και το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Ευκλείδης 2014)



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και $\hat{B} = 72^\circ$. Θεωρούμε σημείο Δ στην ευθεία $B\Gamma$ έτσι ώστε $\Gamma\Delta=AB$ και το σημείο Γ να βρίσκεται μεταξύ των σημείων B και Δ .
 α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα $A\Gamma$ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Delta$.
 β) Στην παράλληλη που άγεται από το σημείο Δ προς την ευθεία AB παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε τα σημεία A και E να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς τη $B\Delta$ και επιπλέον $\Delta E=\Delta B$. Αν οι ευθείες $A\Delta$ και BE τέμνονται στο Z να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$ και AE είναι κάθετες και $AZ=Z\Gamma=B\Gamma$. (Ευκλείδης A τ133-σ41)

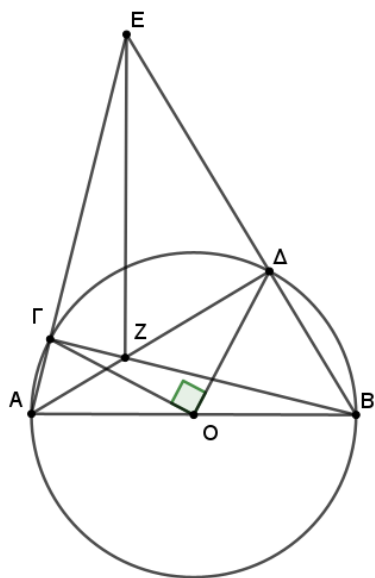


5. Δίνεται κύκλος με κέντρο O , διάμετρο AB και γωνία $\widehat{G\hat{O}D} = 90^\circ$. Οι ευθείες AD και BG τέμνονται στο σημείο Z , ενώ οι ευθείες AG και BD τέμνονται στο σημείο E .

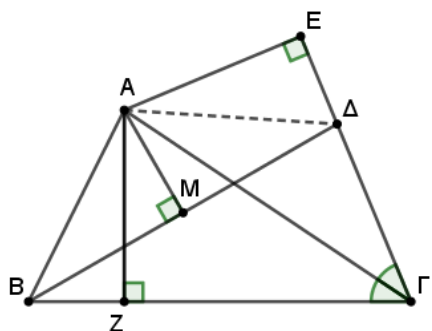
α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\widehat{G\hat{A}D}$ και $\widehat{G\hat{B}D}$.

β) Να αποδείξετε ότι $EZ=AB$

(Ευκλείδης 2019)



6. Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύει ότι $\widehat{B\hat{G}A} = \widehat{A\hat{G}E}$, AM μεσοκάθετος του BD , $AZ \perp BG$ και $AE \perp GE$. Να δείξετε ότι $BZ=ED$.



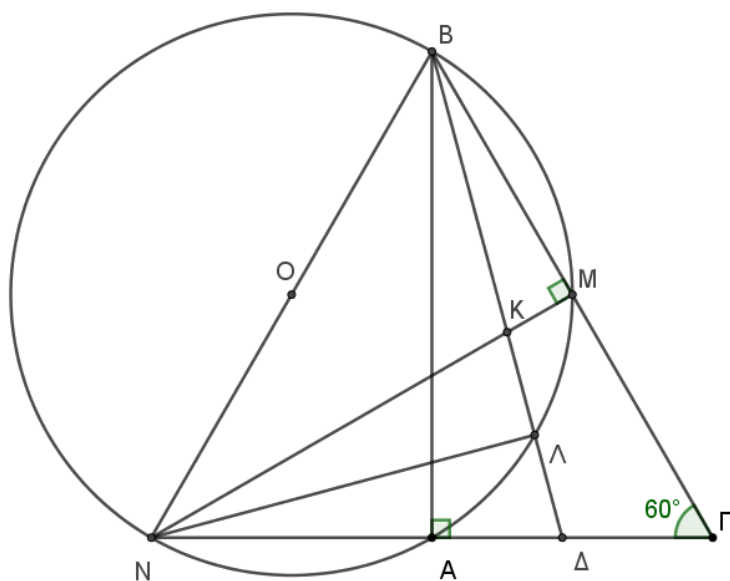
7. (Ευκλείδης 2015)

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $B\Delta$ (το Δ είναι σημείο της $A\Gamma$) στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N . Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$.

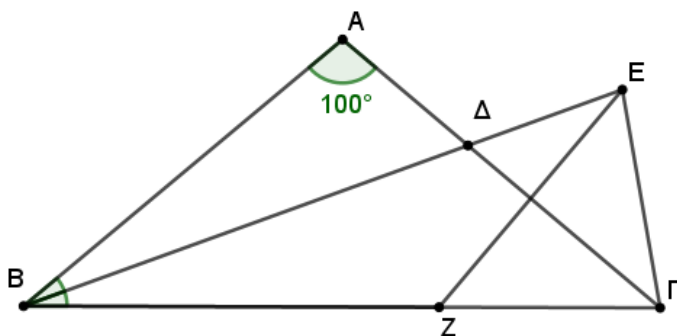
1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, Λ και M . Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις $M\Gamma$, $A\Gamma$ και το τόξο AM του κύκλου ω . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

Σημείωση: Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου ω .



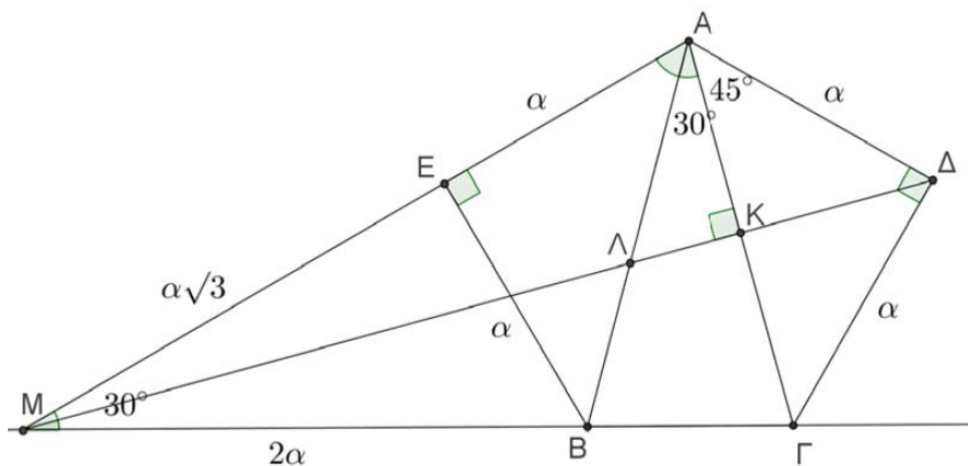
8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 100^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Στην προέκταση της διχοτόμου $B\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $BE = B\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = AB$. Να αποδείξετε ότι $EZ \perp A\Gamma$. (Ευκλείδης Α τ123-σ15)



Υποδείξεις ασκήσεων

1. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΕΔ

3. $K\Lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}, AM = \alpha(1 + \sqrt{3}), B\Gamma = \alpha(\sqrt{3} - 1)$



8. Φέρνω ΖΑ, ΖΔ. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΖ. Συγκρίνω τα τρίγωνα ΖΓΔ και ΓΔΕ. Τότε ΔΖ=ΔΕ και ΓΖ=ΓΕ, τότε ΓΔ μεσοκάθετος.