

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία

1. Οι αριθμοί με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλεια τετράγωνα. (Ευκλείδης 2016, πρόβλημα 2)
2. Μια εξίσωση έχει ρητές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο (Ευκλείδης 2016, πρόβλημα 2)
3. Απόλυτη τιμή
4. Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
5. Ταυτότητα *Euler* : Αν $a + b + c = 0$ τότε $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
6. Αν $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ τότε $a = b = c = 0$ (πχ άσκηση 8.)
7. Αν $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ τότε $a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$
8. $(\sqrt[4]{a})^2 = \sqrt{a}$
9. $(\sqrt[8]{a})^2 = \sqrt[4]{a}$
10. Μια πολύπλοκη παράσταση μπορεί να γίνει πιο απλή αν θέσουμε έναν παράγοντα που εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές, ίσο με μια νέα μεταβλητή.
 πχ1) Ευκλείδης 2016 πρόβλημα 1, θέτουμε $y = \sqrt[3]{x}$ και τότε η νέα εξίσωση λύνεται εύκολα,
 πχ2) στην εξίσωση $x^2 + x = \frac{42}{x^2 + x + 1}$ θέτουμε $y = x^2 + x$ και τότε η νέα εξίσωση $y = \frac{42}{y + 1}$ λύνεται εύκολα.
11. Εύρεση ψηφίων (Ευκλείδης 2017 και Ευκλείδης 2015). Γενικά χρησιμοποιούμε τους περιορισμούς των ψηφίων για να δημιουργήσουμε ανισότητα. πχ. για το διψήφιο xy ισχύει ότι $1 \leq x \leq 9$ και $0 \leq y \leq 9$. Έτσι με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η ανισότητα $1 \leq x + y \leq 18$.
12. Με αφαιρεσία τις γνωστές ανισότητες $(a + b)^2 \geq 0, (a - b)^2 \geq 0$ προκύπτουν διάφορες άλλες ανισότητες. πχ. $a^2 + b^2 \geq 2ab$,
 $(a + b)^2 \geq 4ab$
 $(\frac{a + b}{2})^2 \geq ab$
13. Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ (Ευκλείδης 2020, πρόβλημα 2)

Ασκήσεις

1. Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha + \beta = 1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = x, x \geq 2$, να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει: $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} = \frac{13}{6}$ (Ευκλείδης 2020)

2. Αν οι θετικοί πραγματικοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$. (Ευκλείδης 2019)

3. Αν $x^3 - 2x + 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{x}{x^5 + x^2 + 2}$

4. Αν $x^2 - 5x + 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{x^2}{x^4 + 1}$

5. Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y + 3x}{xy} = \frac{3z + 5y}{yz} = \frac{5x + z}{zx} = \frac{140}{x^2 + y^2 + z^2}$$

6. Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε $a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5$. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a + b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται. (Ευκλείδης 2014)

7. Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + (y^2 - a^2)x + y(y - a)^2 = 0$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού. (Ευκλείδης 2012)

8. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c που ικανοποιούν τις ισότητες $a + b + c = 2010$ και $ab + bc + ca = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2$ (Ευκλείδης 2011)

9. Δύο ποδηλάτες διανύουν μια απόσταση $60km$. με μέσες ταχύτητες που διαφέρουν κατά $5km/h$. Ο ένας ποδηλάτης χρειάζεται 1 ώρα περισσότερο από τον άλλο. Να βρεθούν οι ταχύτητες των ποδηλατών.

10. Ένας εργάτης εργάστηκε επί 10 ημέρες και τελείωσε τα $\frac{2}{7}$ κάποιου έργου. Τότε ήρθε και ένας δεύτερος εργάτης. Στη συνέχεια εργάζονται και οι δύο και τελειώνουν το έργο σε 18 ακόμη ημέρες. Να βρεθεί σε πόσες ημέρες μπορεί να τελειώσει το έργο ο δεύτερος, αν εργαζόταν μόνος του από την αρχή.

11. Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από του δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του. (Ευκλείδης 2017)

12. Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο.

Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα. (Ευκλείδης 2016)

Υποδείξεις ασκήσεων

1. Ισχύει ότι: $\alpha^2 + \beta^2 = x\alpha\beta$ και $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (x - 1)\alpha\beta$. Τότε είναι:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

2. Η πρώτη εξίσωση δίνει $\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta$. Από ταυτότητα ισχύει ότι: $(\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$. Συνεπώς $K = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha^2\beta^2} = 7$

3.
$$\frac{x}{x^5 + x^2 + 2} = \frac{x}{x^2(x^3 - 2x + 1) + 2x^3 - x^2 + x^2 + 2} = \frac{x}{2x^3 + 2} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

4. $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (5x)^2 - 2x^2 = 23x^2$. Τότε $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{x^2}{23x^2} = \frac{1}{23}$

5. Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = \frac{5}{z} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{z}, \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = 3x, z = 5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3z + 5y}{yz} &= \frac{140}{x^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow \frac{15x + 15x}{15x^2} = \frac{140}{x^2 + 9x^2 + 25x^2} \Leftrightarrow \frac{30x}{15x^2} = \frac{140}{35x^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{140}{35x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 4x \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 2. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε: $x = 2, y = 6, z = 10$.

6. Θέτω $s = a + b$, τότε $5a^2 - (8s - 10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0$. Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow s(s - 5) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5$. Συνεπώς μέγιστη τιμή $s = 5$, τότε $a = 3, b = 2$.

7. Δημιουργώ τριώνυμο ως προς a . Πρέπει $\Delta = k^2$. Τότε $xy = \left(\frac{k}{2x}\right)^2$

8. $(a + b + c)^2 = 2010^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 2010^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2010^2}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 670$

9. $t_1 - t_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{60}{x} - \frac{60}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x = 15$

10. Ημερήσια απόδοση εργατών επί πλήθος ημερών = Μέρος του έργου που τελειώνουν. Τότε:

$$\left(\frac{1}{35} + \frac{1}{x}\right) \cdot 18 = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 90$$

11. $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20}$ και $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$. Τότε $x = 10, x > 3, y = 8$

12. Εστω a πήρε ο Γιάννης, b πήρε ο Βαγγέλης, c πήρε ο Βασίλης. Τότε συνολικά έχουν : ο Γιάννης $\frac{3a}{4} + \frac{3b}{8} + \frac{5c}{12}$, ο Βαγγέλης $\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{5c}{12}$, ο Βασίλης $\frac{a}{8} + \frac{3b}{8} + \frac{c}{6}$. Προκύπτει το σύστημα : $18b + 2c = 9a, 3a + 12b = 2c \Rightarrow 5b = a, 27b = 2c$. Είναι b πολλαπλάσιο του 8 με ελάχιστη τιμή το 8. Οπότε $b = 8, a = 40, c = 108$, οπότε το ελάχιστο σύνολο είναι 156.