

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία

- Ο μοναδικός πρώτος και άρτιος αριθμός είναι ο 2. (πχ άσκηση 5.)
- Το γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών είναι πάντα πολλαπλάσιο του 2 (πχ άσκηση 5.)
- Το γινόμενο τριών διαδοχικών φυσικών είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3 (πχ άσκηση 3.)

Έστω $\alpha\beta\gamma$ τριψήφιος. Ισχύουν τα εξής :

- $\alpha\beta\gamma = 100\alpha + 10\beta + \gamma$
- $100 \leq \alpha\beta\gamma \leq 999$
- $1 \leq \alpha \leq 9$, α θετικός ακέραιος
- $0 \leq \beta \leq 9$, β θετικός ακέραιος
- $0 \leq \gamma \leq 9$, γ θετικός ακέραιος

Στις ασκήσεις εύρεσης των ψηφίων ακεραίων αριθμών, συχνά χρησιμοποιώ τα εξής:

- πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη
- πρόσθεση ή αφαίρεση ίδιου παράγοντα ή ύψωση σε δύναμη σε κάθε μέλος (ισχύει και για τις ανισώσεις)
- κανόνες διαιρετότητας με τους ακεραίους : 2, 3, 4, 5, 8, 9
- ένας ακέραιος διαιρείται με το 8 αν το τριψήφιο τμήμα στο τέλος του αριθμού διαιρείται με το 8
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11 αν το άθροισμα των ψηφίων σε μονές θέσεις είναι ίσο με το άθροισμα των ψηφίων σε ζυγές θέσεις. πχ. 121, 143, 651343, 123454321, 7711, 222211, 11011, 110011, 53053, 1210121
- άρτιος $\cdot$ άρτιος = άρτιος
- περιττός + περιττός = άρτιος
- άρτιος $\cdot$ περιττός = άρτιος
- ακέραιος με τελευταίο ψηφίο 2 ή 3 ή 7 ή 8 δεν είναι τέλειο τετράγωνο
- το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x είναι το ίδιο με το τελευταίο ψηφίο του ακεραίου x^5 .

Ασκήσεις

1. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $80^8 + 31^5 + 25^7 + 56^5$
2. Έστω n θετικός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι ο $A = n^2 + n + 1$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. (Ευκλείδης 2015)
3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ διαιρείται με το 3 για κάθε θετικό ακέραιο n .
4. Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακεραίου n ώστε ο αριθμός $A = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7}$ να είναι ακέραιος.

5. Να βρείτε τον πρώτο p και τον φυσικό n , ώστε να ισχύει $p + n^2 + n = 134$
6. Να βρείτε τον πρώτο p και τον φυσικό n , ώστε να ισχύει $11p + 4 = n^2$
7. Υπολογίστε τετραψήφιο αριθμό $xyzw$ του δεκαδικού συστήματος ο οποίος είναι τέλειο τετράγωνο όταν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις: $xy = 3zw + 1$ και $w = y + 1$. (*mathematica.gr*, 214)
8. Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008; (Ευκλείδης 2018)
9. Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $abc = 100a + 10b + c$ που ικανοποιούν την εξίσωση: $abc = (a + b + c)^2 + a + b + c$ (Ευκλείδης 2017)
10. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $xyzw = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $wzyx = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $xyzw$. (Ευκλείδης 2015)
11. Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $abc = 100a + 10b + c$, όπου a, b, c ψηφία, $a > 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα : $abc = (a + b^2 + c^3)^2$ (Ευκλείδης 2009, Ευκλείδης Β τ.71)

Υποδείξεις ασκήσεων

1. $0 + 1 + 5 + 6 = 12$, συνεπώς τελευταίο ψηφίο είναι το 2.
2. $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Ο Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, συνεπώς δεν μπορεί να είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου.
3. $A = n^3 + 3(n^2 + 2n + 1) - n = n^3 - n + 3(n+1)^2 = n(n-1)(n+1) + 3(n+1)^2$ το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 διότι το γινόμενο τριών διαδοχικών αριθμών είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3.
4. $A = \frac{9(n^2 + 7) - 32}{n^2 + 7} = 9 - \frac{32}{n^2 + 7}$. Συνεπώς ο $n^2 + 7$ είναι διαιρέτης του 32, δηλαδή είναι ίσο με 8 ή 16 ή 32. Τότε $n \in \{-1, 1, -3, 3, -5, 5\}$
5. $p = 134 - n(n+1)$ που είναι άρτιος, τότε πρέπει $p = 2$. Τότε $n = 11$.
6. $11p = (n-2)(n+2)$, επειδή 11, p είναι πρώτοι, είναι: $n-2 = p$ ή $n-2 = 1$ ή $n-2 = 11$. Η πρώτη περίπτωση δίνει $n = 9, p = 7$. Οι άλλες περιπτώσεις καταλήγουν σε άτοπο.
7. Η πρώτη δοθείσα σχέση γράφεται: $10x + y = 30z + 3w + 1$ και αν αντικαταστήσουμε όπου w το $y + 1$, έχουμε $10x = 30z + 2y + 4(1)$ Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος τελειώνει σε 0, άρα και το άθροισμα στο δεύτερο μέλος πρέπει να τελειώνει σε 0, αυτό γίνεται μόνο για $y = 3$ ή $y = 8$. Οπότε έχουμε 2 περιπτώσεις:
 - 1η) $y = 3$ άρα και $w = 4$, τότε η (1) γράφεται $10x = 30z + 10$ δηλαδή $x = 3z + 1$. Τότε έχουμε $z = 0, x = 1$ ή $z = 1, x = 4$ ή $z = 2, x = 7$ δηλαδή τους αριθμούς: 1304, 4314, 7324. Ωστόσο κανένας δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Οι υπόλοιπες τιμές για το z απορρίπτονται, διότι δεν θα υπάρχει αντίστοιχο x .
 - 2η) $y = 8$ άρα $w = 9$ και τότε η (1) γράφεται $x = 3z + 2$. Παίρνουμε πάλι περιπτώσεις για το z το οποίο μπορεί να πάρει τις τιμές 0,1,2 και βρίσκουμε τους αριθμούς: 2809, 5819, 8829 από τους οποίους μόνο ο αριθμός 2809 είναι τέλειο τετράγωνο.
8. Έστω τετραψήφιος x ώστε $2007x = 2000x + 7x$ να λήγει σε 2008. Πρέπει ο $7x$ να λήγει σε 008. Πρέπει ο x να λήγει σε 4. Πρέπει ο x να λήγει σε 144. Πρέπει $2000 \cdot a144 + 7 \cdot a144$ να λήγει σε 2008. Πρέπει $2a + (7a + 1) = 9a$ να λήγει σε 2. Πρέπει $a = 9$. Συνεπώς $x = 9144$. Κάθε αριθμός της μορφής $yz9144$ όταν πολλαπλασιαστεί με το 2007, το γινόμενο λήγει σε 2008. Συνεπώς το ζητούμενο πλήθος των εξαψήφιων είναι 90.
9. $(a+b+c)^2 = 9(11a+b)$ δηλαδή $a+b+c$ είναι πολλαπλάσιο του 3. $99 \leq 9(11a+b) \leq 972$ και τότε $10 \leq a+b+c \leq 27$. Συνεπώς οι δυνατές τιμές του $a+b+c$ είναι: 12, 15, 18, 21, 24, 27. Η τιμή 12 δίνει $\overline{abc} = 156$. Οι υπόλοιπες τιμές καταλήγουν σε άτοπο.
10. Είναι $xyzw = 327(x+y+z+w) + 14$ και $wzyx = 227(x+y+z+w) + 16$ και τότε $xyzw - wzyx = 999(x-w) + 90(y-z) = 10(x+y+z+w) - 2$. Πρέπει ο διαιρέτης $x+y+z+w$ να είναι μεγαλύτερος από το υπόλοιπο 16. Συνεπώς πρέπει $17 \leq x+y+z+w \leq 30$. Συνεπώς $1698 \leq 100(x+y+z+w) - 2 \leq 2998$. Συνεπώς $1698 \leq 999(x-w) + 90(y-z) \leq 2998$. Πρέπει $x-w = 1$ ή $x-w = 2$ ή $x-w = 3$. Αν $x-w = 1$ τότε δεν προκύπτει ακέραια λύση. Αν $x-w = 2$ τότε $xyzw = 6554$. Αν $x-w = 3$ τότε δεν προκύπτει ακέραια λύση.
11. Πρέπει $10 < (a+b^2+a^3) < 31$. Τότε $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ και $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Για $c \in \{0, 2, 3\}$ δεν προκύπτουν λύσεις. Για $c = 1$ είναι $100a + 10b + 1 = (a+b^2+1)^2$. Τότε ο αριθμός $a+b^2+1$ λήγει σε 1 ή 9. Τελικά μοναδική λύση είναι ο αριθμός 441.